

М.В.Билюнас, С.Ф.Доценко

*Морской гидрофизический институт, г.Севастополь***АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ
В ЧЕРНОМОРСКИХ ПРОЛИВАХ**

В линейной постановке рассмотрена плоская задача о прогрессивных внутренних волнах в течении двухслойной жидкости с постоянными скоростями в слоях. Получено решение задачи в аналитическом виде, определены условия существования внутренних волн и условия блокировки волн течениями. Для течений, характерных для Черноморских проливов, найдены характеристики внутренних волн и определены области устойчивости течений относительно малых возмущений в форме прогрессивных волн.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *внутренние волны, течения в проливах, двухслойные течения, неустойчивость течений, решения аналитические, черноморские проливы.*

В большинстве проливов течения являются двухслойными, как бы двухъярусными: нижний слой образован более плотной жидкостью, верхний – менее плотной, направления движения водных масс в верхнем и нижнем слоях противоположны. Течения в проливе Босфор, соединяющем Черное и Мраморное моря, являются ярким примером двухслойной структуры течений [1 – 2]. Режим течений в Керченском проливе очень сложен и определяется совокупностью различных факторов, среди которых основной вклад вносит ветер. Течения в Керченском проливе в основном занимают всю толщу вод, но при определенных гидрометеорологических условиях можно наблюдать и двухслойные течения [3]. В рамках линейной теории исследуем устойчивость таких двухслойных течений относительно возмущений в виде внутренних прогрессивных волн. В отличие от работы [4], исследование дополнено анализом устойчивости двухслойного течения в Керченском проливе и проливе Босфор с иной вертикальной структурой, найдены области устойчивости течений в пространстве частот волн, определены условия блокировки волн течениями.

Постановка задачи. В плоскости Oxz , где x – горизонтальная, z – вертикальная координаты, рассматривается горизонтальное течение идеальной несжимаемой двухслойной жидкости. Скорости течения U_1 и U_2 постоянны в каждом слое и противоположны по направлению. Глубины и плотности слоев постоянны и равны h_1 и h_2 , ρ_1 и ρ_2 соответственно для верхнего и нижнего слоев. Общая глубина потока H .

Нестационарные внутренние волны в двухслойном течении идеальной жидкости в области $-\infty < x < +\infty$, $-H < z < 0$, описываются системой 6 линейаризованных относительно среднего течения уравнений:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_j}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{u}_j(x, z, t)$ – малые возмущения горизонтальной скорости потока в верхнем ($j = 1$) и нижнем ($j = 2$) слоях; $\bar{w}_j(x, z, t)$ – вертикальная скорость; $\bar{p}_j(x, z, t)$ – динамические возмущения гидростатического давления жидкости.

Систему уравнений (1) – (3) необходимо дополнить граничными условиями. На невозмущенной поверхности жидкости $z = 0$ и дне бассейна $z = -H$ при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и $t \geq 0$ должны выполняться условия «твердой крышки» или скольжения (непротекания) жидкости:

$$\bar{w}_1 = 0 \quad (z = 0), \quad \bar{w}_2 = 0 \quad (z = -H). \quad (4)$$

На границе раздела слоев $z = -h_1$ задаются два условия согласования решений в слоях – кинематическое и динамическое:

$$\bar{w}_1(-h_1) = \frac{\zeta_t + U_1 \zeta_x}{\zeta_t + U_2 \zeta_x} \cdot \bar{w}_2(-h_1), \quad (5)$$

$$\bar{p}_1|_{z=-h_1+0} - \rho_1 g \zeta = \bar{p}_2|_{z=-h_1-0} - \rho_2 g \zeta, \quad (6)$$

где $\zeta(x, t)$ – смещение скачка плотности от горизонтального положения $z = -h_1$, g – ускорение свободного падения.

Переход к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим прогрессивные внутренние волны вида

$$\{\bar{u}_j, \bar{p}_j, \zeta\} = \{u_j(z), p_j(z), a\} \cos(kx - \sigma t), \quad \bar{w}_j = w_j(z) \sin(kx - \sigma t), \quad (7)$$

где k и σ – волновое число и частота волны, связанные между собой подлежащим нахождению дисперсионным соотношением; u_j, w_j, p_j – неизвестные амплитудные функции; a – неизвестная амплитуда смещений скачка плотности. Подстановка выражений (7) в (1) – (6) и исключение из полученных соотношений всех неизвестных функций кроме $w_{1,2}$ приводят к краевой задаче для нахождения собственных значений $\sigma = \sigma(k)$ и соответствующих им распределений по z амплитудных функций полей вертикальной скорости в слоях:

$$w_1'' - k^2 w_1 = 0 \quad (-h_1 < z < 0), \quad (8)$$

$$w_2'' - k^2 w_2 = 0 \quad (-H < z < -h_1), \quad (9)$$

$$w_1(0) = 0, \quad (10)$$

$$w_1(-h_1) = \theta \cdot w_2(-h_1), \quad w_2'(-h_1) - \eta \cdot w_2(-h_1) - \gamma \theta w_1'(-h_1) = 0, \quad (11)$$

$$w_2(-H) = 0, \quad (12)$$

где штрих означает производную по вертикальной координате z ;

$$\eta = \frac{\varepsilon g}{(U_2 - c)^2}, \quad \theta = \frac{U_1 - c}{U_2 - c}, \quad \gamma = \rho_1 / \rho_2, \quad \varepsilon = 1 - \gamma,$$

$c = \sigma / k$ – фазовая скорость внутренней волны. При $c > 0$ волна распространяется вправо, при $c < 0$ – влево.

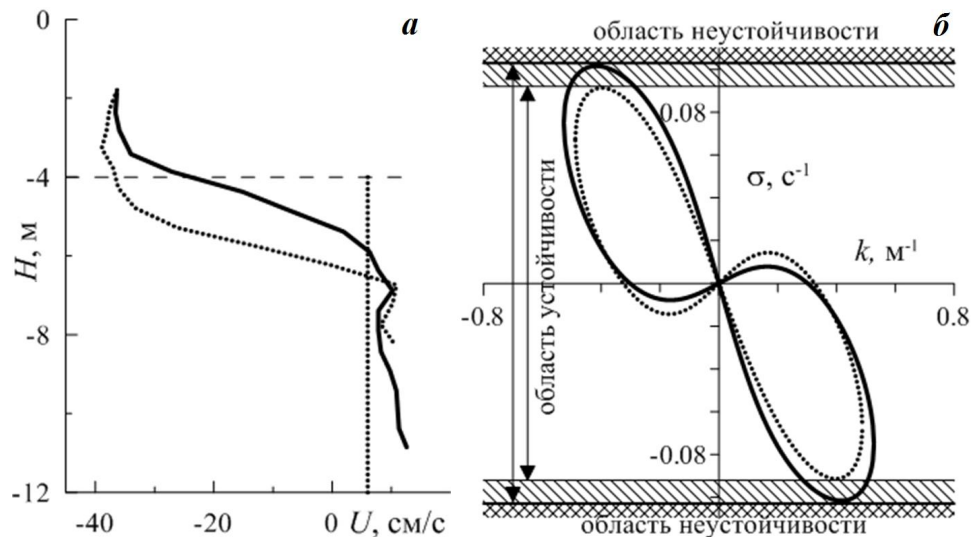
Решение задачи получаем в виде дисперсионной зависимости:

$$\sigma = \frac{(\gamma a_1 U_1 + a_2 U_2)k \pm \sqrt{\Delta(k)}}{\gamma a_1 + a_2}, \quad (13)$$

где $a_j = \text{cth}kh_j$, $\Delta = \varepsilon g(\gamma a_1 + a_2)k - \gamma a_1 a_2 (U_1 - U_2)^2 k^2$.

Линейная устойчивость двухслойных сдвиговых течений относительно внутренних волн. Неустойчивость течений относительно возмущений в виде прогрессивных внутренних волн малой амплитуды возникает при значениях параметров, при которых частота волны, найденная из дисперсионного соотношения, имеет ненулевую мнимую часть. В случае дисперсионной зависимости (13) неустойчивые внутренние волны с экспоненциальным ростом амплитуды существуют при условии $\Delta < 0$. Граница нейтральной устойчивости определяется из уравнения $\Delta = 0$.

Течения, характерные для южной части Керченского пролива, и соответствующие им дисперсионные кривые представлены на рис.1. Диапазон существования внутренних волн ограничен по волновому числу k и по частоте волны σ . Профили скорости, построенные по данным двух станций, очень похожи (рис.1, а), как и профили плотности ($\rho_1 = 1005,7 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $\rho_2 = 1010,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$) [3]. Поэтому области устойчивости течения относительно волновых возмущений малой амплитуды для этих двух случаев различаются не сильно. Для течения, отмеченного сплошной линией на рис.1, а (станция 9), область устойчивости течения лежит в диапазоне $|k| \leq 0,527 \text{ м}^{-1}$ по волновому числу и $|\sigma| \leq 0,1 \text{ с}^{-1}$ по частоте волны. В случае течения отмеченного пунктирной линией (станция 10) соответствующие диапазоны $|k| \leq 0,487 \text{ м}^{-1}$ и $|\sigma| \leq 0,09 \text{ с}^{-1}$. Существуют две пары точек блокировки внутренних волн (экстремумы на рис.1, б). В этих точках групповая скорость равна нулю, а фазовая отлична от нуля, что указывает на рост амплитуды такой



Р и с . 1 . Распределения скорости течения в Керченском проливе (ст.9 (—) и 10 (- - -)) (а) и соответствующие им дисперсионные зависимости (б) для внутренних волн.

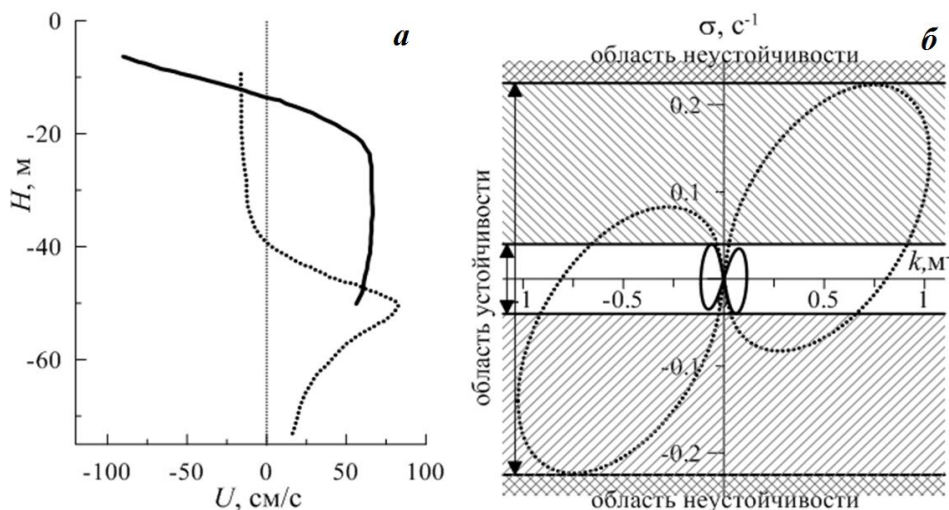
прогрессивной волны со временем. Условие возникновения двух пар точек блокировки определяется следующим образом:

$$\frac{\gamma h_2 U_1^2 + h_1 U_2^2}{\gamma h_2 + h_1} < c_{\text{BB}}^2, \quad (14)$$

где $c_{\text{BB}}^2 \approx \frac{\varepsilon g h_1 h_2}{h_2 + h_1}$ – скорость распространения длинных внутренних волн.

Для распределений скорости, показанных на рис.1, *а*, возможно существование двух или четырех (при $|\sigma| < 0,008 \text{ с}^{-1}$ и $|\sigma| < 0,014 \text{ с}^{-1}$ соответственно) внутренних волн, распространяющихся вдоль течения в верхнем слое (в направлении Черного моря) или вдоль течения в нижнем слое (в направлении Азовского моря).

Для пролива Босфор течения в северной и южной его частях сильно отличаются. Это объясняется различной глубиной и гидрометеорологическими условиями, что иллюстрирует рис.2, *а*. В северной части пролив Босфор имеет большую глубину (порядка 70 – 80 м), соответственно больше глубина скачка плотности (40 – 50 м). По направлению к Мраморному морю глубина верхнего распресненного слоя уменьшается (10 – 20 м), как и общая глубина пролива (до 50 м). Профиль течения, измеренного в районе Мраморного моря по данным работы [1], изображен сплошной линией (рис.2, *а*) и характеризуется большими скоростями течения в верхнем слое, особенно на поверхности (более 1 м/с). Распределение скорости в районе Черного моря (пунктирная линия на рис.2, *а*) говорит об интенсивном течении в нижнем слое. Области устойчивости для этих случаев значительно отличаются. Течение в северной части пролива Босфор устойчиво относительно волновых возмущений при $|k| \leq 1,026 \text{ м}^{-1}$ и $|\sigma| \leq 0,022 \text{ с}^{-1}$. На графике дисперсионных кривых присутствуют экстремумы аналогично рис.1, *б*: существуют две пары точек блокировки внутренних волн, так как для параметров течения



Р и с . 2 . Профили скорости течения в проливе Босфор в южной (—) и северной (---) частях (*а*) и соответствующие им дисперсионные зависимости (*б*) для внутренних волн, возникающих в таком течении.

в проливе Босфор выполняется условие (14). В частотных диапазонах $(-0,22; -0,08) \text{ с}^{-1}$ и $(0,08; 0,22) \text{ с}^{-1}$ могут существовать только две внутренние волны, распространяющиеся вдоль нижнего течения. При $|\sigma| < 0,08 \text{ с}^{-1}$ существуют четыре волны, две из которых распространяются в направлении Мраморного моря, а другие две – в направлении Черного.

Область устойчивости течения в районе Мраморного моря гораздо уже ($|k| \leq 0,115 \text{ м}^{-1}$ и $|\sigma| \leq 0,04 \text{ с}^{-1}$). Для этого случая возможно существование четырех прогрессивных волн, две из которых распространяются по направлению к Черному морю, а две – к Мраморному. Существование двух внутренних волн возможно только в узком диапазоне по $|\sigma|$ от 0,035 до $0,04 \text{ с}^{-1}$.

Выводы. В линейной постановке рассмотрена плоская задача о свободных прогрессивных гравитационных волнах в горизонтальном течении двухслойной жидкости. Для течений, типичных для различных частей пролива Босфор и Керченского пролива, определены характеристики прогрессивных внутренних волн, в частности, диапазоны (в пространстве волновых чисел и частот) устойчивости течения двухслойной жидкости относительно малых волновых возмущений. Для заданной частоты волны установлено существование двух или четырех прогрессивных волн различной направленности и четырех точек блокировки. Определено условие блокировки волн течением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jarosz E., Teague W.J., Book J.W., Beşiktepe Ş. On flow variability in the Bosphorus Strait // J. Geophys. Res.– 2011.– 116, C08038.– P.1-17.
2. Webster F. Vertical profiles of horizontal ocean currents // DeepSea Res.– 1969.– v.16, № 1.– P.85-98.
3. Морозов А.Н., Лемешко Е.М., Иванов В.А., Шутков С.А., Зима В.В. Течения в Керченском проливе по данным ADCP наблюдения 2008 – 2009 гг. // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зоны и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2010.– вып.22.– С.253-267.
4. Биллюнас М.В., Доценко С.Ф. Неустойчивость двухслойных течений в проливах Черного моря // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2013.– вып.27.– С.179-183.

Материал поступил в редакцию 24.11.2014 г.

АНОТАЦІЯ Розглянуто плоска задача про прогресивні гравітаційні внутрішні хвилі у горизонтальній двошаровій течії. Для течій з параметрами, типовими для протоки Босфор і Керченської протоки, розраховані характеристики внутрішніх хвиль. У просторі хвильових чисел та частот визначені діапазони стійкості і нестійкості двошарових течій з характерними для цих проток параметрами відносно малих збурень у формі прогресивних хвиль у просторі частот. Визначені умови блокування хвиль у течії.

ABSTRACT The plane problem of the progressive internal gravity waves in a horizontal two-layer flow is considered. For the flows with the typical parameters for the Bosphorus Strait and the Strait of Kerch, characteristics of internal waves are calculated. The stability regimes of two-layer currents with characteristic parameters of these straits with respect to small wave disturbances are found in the frequency space. The condition of wave-blocking are found.