

В.С.Кочергин

Морской гидрофизический институт, г.Севастополь

**ВАРИАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОЩНОСТИ
ИСТОЧНИКА В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ
В АЗОВСКОМ МОРЕ**

Рассматривается модель переноса пассивной примеси в Азовском море. На её основе реализован вариационный алгоритм идентификации мощности источника загрязнения. В основе алгоритма лежит минимизация квадратичного функционала качества прогноза и решение сопряженной задачи. Проведены тестовые расчеты по идентификации мощности источника загрязнения расположенного в Казантипском заливе при различных ветровых воздействиях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *идентификация мощности источника, вариационный алгоритм, функционал невязок, поле концентрации, усвоение данных измерений, Азовское море.*

Алгоритм. При изучении динамики распространения примесей необходимо использование как современных математических моделей [1], так и методов усвоения данных измерений [2, 3], которые позволяют идентифицировать входные параметры модели. Алгоритмы усвоения данных измерений основаны, как правило, на минимизации квадратичного функционала качества прогноза, характеризующего отклонения модельного решения от измерений. При этом модель переноса пассивной примеси выступает в качестве ограничений на вариации входных параметров. В [4] всесторонне рассмотрен вариационный алгоритм идентификации мощности источника для двумерной модели, показана его работоспособность при наличии измерений на периферии пятна загрязнений в случае действия источника постоянной мощности. В данной работе такой подход применен для модели переноса пассивной примеси в Азовском море.

Рассмотрим следующую модель переноса пассивной примеси в σ -координатах

$$\begin{aligned} & \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma} + Q \cdot \delta(x - x_0, y - y_0, \sigma - \sigma_0) \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \Gamma: \frac{\partial C}{\partial n} &= 0, & \sigma = 0: \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= Q_s \cdot \delta(x - x_0, y - y_0), \\ \sigma = -1: \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= Q_b \cdot \delta(x - x_0, y - y_0) \end{aligned} \quad (2)$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (3)$$

где Q, Q_S, Q_B – мощности источника в точке (x_0, y_0) на глубине σ , на поверхности и на дне соответственно.

Задача усвоения данных измерений $C_{изм}$ состоит в минимизации квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} [P(C - C_{изм}), P(C - C_{изм})]_{M_t}, \quad (4)$$

где $M_t = M \times [0, T]$, P – оператор расширения нулями функций невязок заданных на множестве точек измерений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (4) с ограничениями модели эквивалентна поиску экстремума следующего функционала

$$\begin{aligned} I = I_0 + & \left[\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q \cdot \delta(x - x_0, y - y_0, \sigma - \sigma_0), C^* \right]_{M_t} + \\ & + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_e} + (C - C_0, C^*)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_S \cdot \delta(x - x_0, y - y_0), C^* \right)_{\sigma_t^0} + \\ & + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_B \cdot \delta(x - x_0, y - y_0), C^* \right)_{\sigma_t^{-1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Записывая вариацию функционала (5) и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в σ -координатах

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0, \quad (6)$$

получим

$$\begin{aligned} \delta I = & (\delta Q \cdot \delta(x - x_0, y - y_0, \sigma - \sigma_0), C^*)_{M_t} + \\ & + (\delta Q_S \cdot \delta(x - x_0, y - y_0, 0), C^*)_{\sigma_t^0} + (\delta Q_B \cdot \delta(x - x_0, y - y_0, -1), C^*)_{\sigma_t^{-1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где C^* – множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряженной задачи

$$\begin{aligned} - \frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \\ - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = -P(C - C_{изм}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (9)$$

$$t = T : C^* = 0. \quad (10)$$

В случае, когда данные измерений имеются на конечный момент времени T в (8) задаем правую часть равную нулю, а при $t = T$ в (10) используется условие

$$t = T : C^* = P(C_{изм} - C). \quad (11)$$

Из условия стационарности функционала (5) $\delta I = 0$ и определения градиента функционала имеем при $Q = const, Q_S = const, Q_B = const$

$$\nabla_Q I = \int_0^T C^*(x_0, y_0, \sigma, t) dt, \quad (12)$$

$$\nabla_{Q_S} I = \int_0^T C^*(x_0, y_0, 0, t) dt, \quad (13)$$

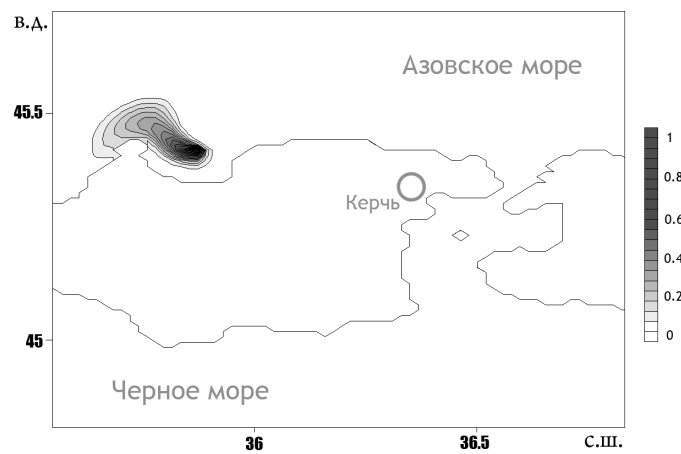
$$\nabla_{Q_B} I = \int_0^T C^*(x_0, y_0, -1, t) dt. \quad (14)$$

Далее осуществляется спуск в направлении соответствующего градиента функционала.

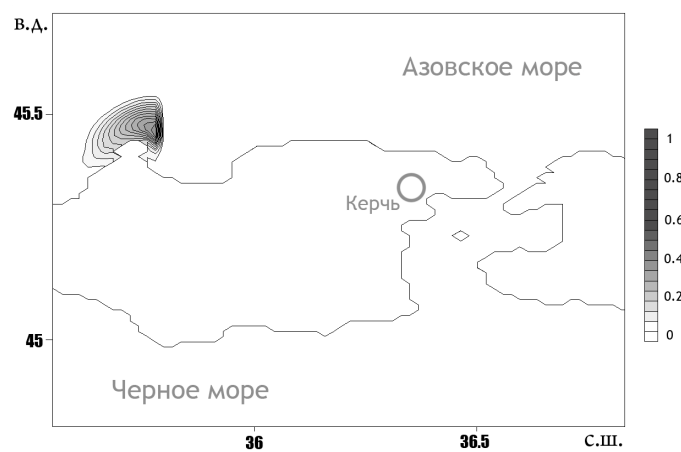
Результаты численных экспериментов. Численные эксперименты проводились с моделью [7] для акватории Азовского моря. Для тестирования вариационного алгоритма идентификации мощности источника в заливе Казантип был проведен расчет на установление модельного поля течений с постоянным ветром 10 м/с восточного направления. В результате моделирования так же было получено пространственное распределение коэффициентов A_H и K_H . Поля скоростей и коэффициентов турбулентной диффузии использовались в качестве входной информации при интегрировании модели переноса пассивной примеси на срок 10 суток.

Моделирование распространения загрязнений от постоянно действующего источника единичной мощности проводилось при различном ветровом воздействии. Программный код предусматривает задание источника, как на поверхности моря $Q_S = 1$, так и на дне $Q_B = -1$. Рассмотрим случай $Q_B = -1$ в заливе Казантип при восточном ветре. При таком ветровом воздействии происходит достаточно интенсивное «проветривание» залива, и примесь распространяется в северо-западном направлении (рис.1). При ассимиляции в качестве данных измерений используется информация с периферии области загрязнения (рис.2). На рис.1 – 3 приведены шкалы значений полей концентрации, нормированных на соответствующие максимальные величины.

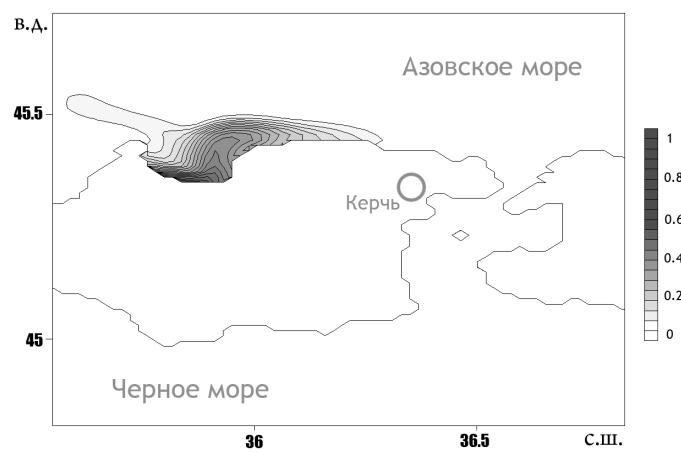
В результате решения сопряженной задачи (8) – (10) при первой итерации имеем распределение C^* на момент времени $t = 0$ (рис.3), которое характеризует влияние невязок прогноза на мощность Q_B в точке (x_0, y_0) . В процессе итераций (рис.4) происходит падение нормированного функционала качества прогноза, и восстанавливается известное значение Q_B (рис.5). Результаты численных экспериментов показали, что сходимость итерационного процесса зависит от количества усваиваемой информации. В случае ассимиляции всей информации о моделируемом поле на конечный момент времени для достижения минимума функционала требуется одна итерация. Наибольшей информативностью обладают точки расположенные ближе к источнику загрязнения.



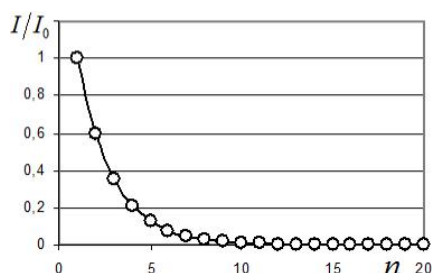
Р и с . 1 . Поле концентрации при восточном ветровом воздействии.



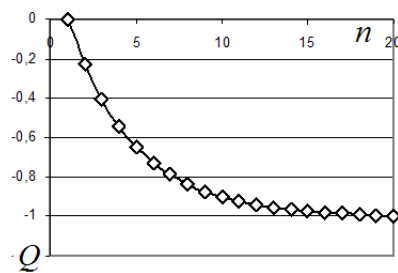
Р и с . 2 . Данные измерений.



Р и с . 3 . Функция влияния.



Р и с . 4. Падение нормированного функционала качества прогноза.



Р и с . 5. Идентификация в результате итераций.

В [4] показано, что для идентификации $Q(t)$ необходима информация обо всем поле концентрации на конечный момент времени. Учитывая возможность распределения данных измерений во времени, можно также утверждать, что для более точной идентификации $Q(t)$ необходимо располагать точки измерений в области, прилегающей к источнику загрязнений. В целом проведенные численные эксперименты показали надежную работу вариационного алгоритма идентификации мощности источника загрязнения, применительно к модели переноса пассивной примеси в Азовском море.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов В.А., Фомин В.В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне моря-суша.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2008.– 363 с.
2. *Кочергин С.В., Кочергин В.С., Фомин В.В.* Определение концентрации пассивной примеси в Азовском море на основе решения серии сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2012.– вып.26, т.2.– С.112-118.
3. *Marchuk G.I., Penenko V.V.* Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment // Modelling and Optimization of Complex Systems / Ed. G.I. Marchuk. Proc. of the IFIP-TC7 Working conf.– New-York: Springer, 1978.– P.240-252.
4. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2010.– вып.22.– С.240-244.

Материал поступил в редакцию 31.01.2014 г.

АНОТАЦІЯ Розглядається модель переносу пасивної домішки в Азовському морі. На її основі реалізований варіаційний алгоритм ідентифікації потужності джерела забруднення. В основі алгоритму лежить мінімізація квадратичного функціонала якості прогнозу і рішення пов'язаною завдання. Проведено тестові розрахунки з ідентифікації потужності джерела забруднення розташованого в Казантипській затоці при різних вітрових впливах.

ABSTRACT A model of passive impurity transport in the Azov Sea is discussed. On a base of it the variance algorithm is realized to identify power pollution source. The algorithm is based minimization of a quadratic functional of the forecast quality and the decision of dual problem. To identify the power contamination source located in the Gulf of Kazantip the test calculations were carried out at different wind impacts.