

А.И.Гончар, И.Н.Титов, Н.И.Титова

*Научно-технический центр
панорамных акустических систем НАН Украины, г.Запорожье***МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ ГЕОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДАХ,
СОДЕРЖАЩИХ КАРСТОВЫЕ ПОЛОСТИ**

Рассматриваются вопросы моделирования распространения и рассеяния акустических волн с целью диагностики карстовых полостей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *моделирование, рассеяние, геоакустические волны, затухание, карстовая полость.*

Для предварительного анализа параметров геоакустических волновых полей и интерпретации результатов геоакустических исследований широко используются методы математического моделирования. Большинство используемых расчетных схем базируется на идеально упругой модели Гука, в которой среда описывается объемной плотностью ρ и модулями упругости λ и μ для объемных и сдвиговых деформаций (коэффициентами Ламе). В рамках такого подхода можно моделировать большинство основных типов сейсмо- и геоакустических волн, несущих информацию о неоднородном строении различных геологических сред [1, 2]. Но при решении целого ряда задач данный подход имеет ограниченное применение, поскольку реальные геологические среды (в том числе и карстовые породы) являются сложными материалами, отличающимися анизотропией свойств и являющимися неоднородными слоистыми и пористыми двух- или трехфазными структурами. Широкое распространение указанного подхода связано с относительной простотой реализации решения. Тем не менее, разработка новых подходов, сочетающих более адекватные модели среды с простотой реализации, является актуальной научно-технической задачей.

Основная проблема, решение которой невозможно в рамках упругой модели Гука – учет поглощения геоакустических волн. Кроме того, актуальным является и вопрос выбора адекватных граничных условий на поверхностях карстовых полостей, которые могут иметь как каноническую, так и неканоническую форму.

Поэтому целью работы было создание математической модели процесса распространения и рассеяния затухающих геоакустических волн для решения задачи диагностики карстовых полостей, а также проведение расчетов в рамках предложенной модели для случая сферической карстовой полости.

Постановка задачи. Распространение и рассеяние затухающих упругих волн в карстовой породе, содержащей сферическую полость, описывается уравнением Ламе для радиального смещения частиц среды с учетом сферической симметрии задачи (считаем, что начало координат совпадает с центром полости)

$$\rho \ddot{u} + \alpha \dot{u} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) - \mu \frac{2u}{r^2}, \quad (1)$$

где α – коэффициент затухания. С учетом предварительного напряженно-деформированного состояния карста (u_0 – начальные смещения) начальные условия будут иметь вид:

$$\dot{u}|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (2)$$

Так как на бесконечности упругие волны затухают, а на границе полости имеет место состояние механического равновесия, то в качестве граничных условий возьмем следующие соотношения

$$u|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \sigma_{rr}|_{r=R} = -P'|_{r=R}, \quad (3)$$

где R – радиус полости.

С учетом того, что давление и радиальная компонента тензора напряжений определяются выражениями

$$P' = P - \frac{P_*}{R} - 3\gamma P_* \frac{u}{R}, \quad \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} + 2\lambda \frac{u}{r} \Big|_{r=R},$$

где γ – показатель степени из уравнения состояния Тэта для воды, P_* – характерное давление воды в карстовой полости, граничное условие на полости примет вид

$$\frac{3\gamma P_* - 2\lambda}{R} u|_{r=R} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (4)$$

Таким образом, решение задачи (1) – (4) определяет поля смещений в упругой волне, рассеянной сферической карстовой полостью.

Результаты расчетов и их обсуждение. Применим к уравнению (1) преобразование Лапласа. С учетом начальных условий (2) получим следующее уравнение

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{u}}{dr^2} + 2r \frac{d\tilde{u}}{dr} - \left[2 \left(1 + \frac{c_l^2}{c_t^2} \right) + \frac{s(s+\beta)}{c_t^2} r^2 \right] \tilde{u} = -\frac{(s+\beta)u_0 r^2}{c_t^2}, \quad (5)$$

где $\tilde{u}(r, s)$ – лаплас-образ функции $u(r, t)$, s – параметр преобразования Лапласа, $\beta = \alpha/\rho$, $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости упругих продольных и поперечных волн.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r, s) = & \frac{\tilde{A}(s)}{\sqrt{r}} I_\nu \left(\sqrt{s(s+\beta)} \frac{r}{c_l} \right) + \frac{\tilde{B}(s)}{\sqrt{r}} K_\nu \left(\sqrt{s(s+\beta)} \frac{r}{c_l} \right) + \frac{u_0 (s+\beta)}{\sqrt{r} c_l^2} \times \\ & \times \int r'^{7/2} \cdot \left[I_\nu \left(\sqrt{s(s+\beta)} \frac{r'}{c_l} \right) K_\nu \left(\sqrt{s(s+\beta)} \frac{r}{c_l} \right) - \right. \\ & \left. - I_\nu \left(\sqrt{s(s+\beta)} \frac{r}{c_l} \right) K_\nu \left(\sqrt{s(s+\beta)} \frac{r'}{c_l} \right) \right] dr' \end{aligned}$$

где $\nu = \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{8c_t^2}{9c_l^2}}$, I_ν и K_ν – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν , $\tilde{A}(s)$ и $\tilde{B}(s)$ – постоянные, определяемые граничными условиями.

Так как аргумент модифицированных функций Бесселя, входящих в решение уравнения (5) мал, воспользуемся известными асимптотиками этих функций при малых значениях аргумента [3]:

$$I_\nu(x) \approx \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad K_\nu(x) \approx \frac{1}{2}\Gamma(\nu)(x/2)^{-\nu} \quad (6)$$

Используя соотношения (3), (4), (6), получим асимптотическое выражение для изображения механического смещения

$$\tilde{u}(r, s) = \frac{\beta^2 u_0 r^2}{c_l^2 \left(\frac{25}{4} - \nu^2 \right)} \left[\frac{3\gamma P_* - 6\lambda - 8\mu}{3\gamma P_* - 2\lambda - \left(\nu - \frac{1}{2} \right)(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{r}{R} \right)^{\nu - \frac{5}{2}} - 1 \right] \frac{s}{(s + \beta)^2} \quad (7)$$

Проводя обратное преобразование Лапласа для выражения (7), получим

$$u(r, t) = \frac{\beta^2 u_0 r^2}{c_l^2 \left(\frac{25}{4} - \nu^2 \right)} \left[\frac{3\gamma P_* - 6\lambda - 8\mu}{3\gamma P_* - 2\lambda - \left(\nu - \frac{1}{2} \right)(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{r}{R} \right)^{\nu - \frac{5}{2}} - 1 \right] \times \\ \times (1 - \beta t) \exp(-\beta t)$$

Вводя безразмерную радиальную координату $x = r/R$, для безразмерного смещения точек среды $\bar{U}(x, t) = u(r, t)/u_0$, получим

$$\bar{U}(x, t) = \frac{\beta^2 R^2 x^2}{c_l^2 \left(\frac{25}{4} - \nu^2 \right)} \left[\frac{3\gamma P_* - 6\lambda - 8\mu}{3\gamma P_* - 2\lambda - \left(\nu - \frac{1}{2} \right)(\lambda + 2\mu)} x^{\nu - \frac{5}{2}} - 1 \right] \times \\ \times (1 - \beta t) \exp(-\beta t). \quad (8)$$

Радиальная компонента тензора напряжений определяется выражением

$$\sigma_{rr}(r, t) = \frac{2\beta^2 u_0 r}{c_l^2 \left(\frac{25}{4} - \nu^2 \right)} (1 - \beta t) \exp(-\beta t) \times \\ \times \left[\left(2\lambda + \frac{1}{2} \left(\nu - \frac{1}{2} \right)(\lambda + 2\mu) \right) \frac{3\gamma P_* - 6\lambda - 8\mu}{3\gamma P_* - 2\lambda - \left(\nu - \frac{1}{2} \right)(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{r}{R} \right)^{\nu - \frac{5}{2}} - 3\lambda - 2\mu \right].$$

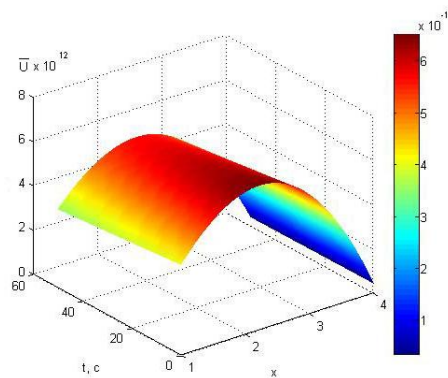
Для безразмерной радиальной компоненты тензора напряжений $\bar{\sigma}(x, t) = \sigma_{rr}(r, t)/\sigma_0$ (где $\sigma_0 = \lambda u_0/R$) имеем

$$\bar{\sigma}(x, t) = \frac{2\beta^2 x}{c_l^2 \left(\frac{25}{4} - \nu^2 \right)} (1 - \beta t) \exp(-\beta t) \times \\ \times \left[\left(2 + \frac{1}{2} \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \left(1 + 2 \frac{\mu}{\lambda} \right) \right) \frac{3\gamma P_* - 6\lambda - 8\mu}{3\gamma P_* - 2\lambda - \left(\nu - \frac{1}{2} \right)(\lambda + 2\mu)} x^{\nu - \frac{5}{2}} - 3 - 2 \frac{\mu}{\lambda} \right]. \quad (9)$$

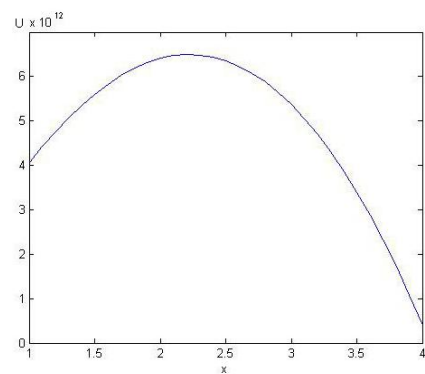
Расчеты проводились при следующих значениях радиуса карстовой полости $R = 10$ м акустических параметров карста [4] $c_l = 5000$ м/с, $c_t = 3000$ м/с, $\rho = 2700$ кг/м³, $\beta = 0,0014$ с⁻¹ и термодинамических параметров воды, заполняющей полость [1] $\gamma = 7$, $P_* = 3,2 \cdot 10^8$ Па. Результаты расчетов, проведенных по формулам (8) и (9), приведены на рис.1 – 4.

Результаты расчетов, приведенные на рис.1 и 2, свидетельствуют о наличии максимумов смещения точек среды на расстоянии $r = 2,2R$ от центра полости. Поэтому в этой области пространства имеет смысл размещать приборы, регистрирующие смещения точек карстовой породы. На рис.3 и 4 видно, что радиальная компонента тензора напряжений максимальна на поверхности полости и спадает с увеличением расстояния от центра полости, меняя знак при $r \approx 1,8 R$, что является свидетельством смены растягивающих напряжений сжимающими.

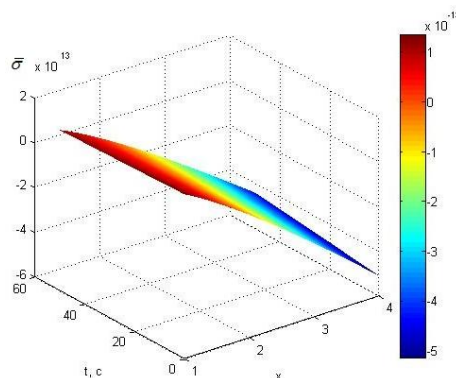
Выводы. Предложена новая математическая модель рассеяния затухающих упругих волн на карстовых полостях сферической формы.



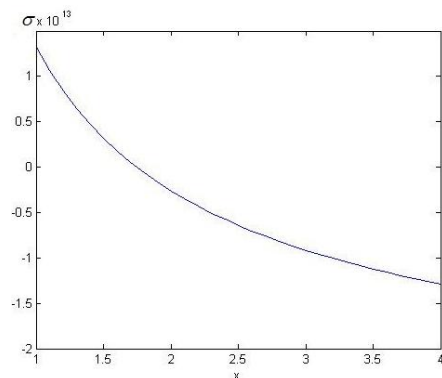
Р и с . 1 . Зависимость безразмерных смещений частиц карста от безразмерной радиальной координаты и времени.



Р и с . 2 . Радиальное распределение безразмерных смещений частиц карста в момент времени $t = 1$ с.



Р и с . 3 . Зависимость безразмерной радиальной компоненты тензора напряжений от безразмерной радиальной координаты и времени.



Р и с . 4 . Радиальное распределение безразмерной радиальной компоненты тензора напряжений в момент времени $t = 1$ с.

Максимум смещения точек среды находится на расстоянии $r = 2,2R$ от центра полости. Это позволяет говорить о практической целесообразности размещения сейсмомодатчиков в этой области пространства с целью надежной регистрации рассеянной волны.

Радиальная компонента тензора напряжений меняет знак при $r \approx 1,8 R$, что свидетельствует о имеющей место в этой области породы смене растягивающих напряжений сжимающими.

Зависимость характеристик рассеянной упругой волны (формулы (8), (9)) от параметров воды (γ , P_*), находящейся в полости, свидетельствуют о возможности идентификации карстовых полостей геоакустическими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. – М.: Наука, 1990. – 237 с.
2. *Математическое моделирование пространственной структуры геофизических сред и оценка возмущений акустических полей, обусловленных наличием локализованных структурных аномалий.* Отчет о НИР / НТЦ ПАС НАН Украины. – Запорожье, 2005. – 47 с.
3. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. Абрамовица М., Стигана И.; пер. с англ. В.А.Диткин, Л.Н.Кармазина. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
4. *Физические величины: Справочник* / Под ред. И.С.Григорьева, Е.З.Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

Материал поступил в редакцию 13.06.2013 г.

АНОТАЦІЯ Розглядаються питання моделювання розповсюдження і розсіювання акустичних хвиль з метою діагностики карстових порожнин.

ABSTRACT In this paper, issues of modeling acoustic waves propagation and scattering for the purpose of karst cavities analysis are described