

С.В. Кочергин

Морской гидрофизический институт НАН Украины, г. Севастополь

**ВЫБОР РАЗНОСТНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ
ПРИ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ
В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ**

При численной реализации вариационных алгоритмов ассимиляции данных измерений важна согласованность информации с моделью, в том числе с ее разностным аналогом. Несогласованность может возникать как за счет неточности задания входных параметров модели, так и за счет используемой разностной дискретизации. Этот вопрос решается путем идентификации входных параметров модели, а так же за счет использования дополнительных членов в функционале качества прогноза, характеризующих гладкость получаемого решения [1].

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *вариационный алгоритм, ассимиляция данных измерений, моделирование переноса примеси, идентификация параметров, разностная дискретизация, функционал качества прогноза.*

Рассмотрим простейшее одномерное уравнение переноса пассивной примеси

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = A \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$\Gamma : C = 0; \quad (2)$$

$$t = 0 : C = C_0(x), \quad (3)$$

где C – концентрация примеси, $F = UC$ – поток вещества, U – скорость, A – коэффициент турбулентной диффузии, Γ – граница области интегрирования $[0, x]$. Задача решается на временном интервале $[0, T]$.

Рассмотрим консервативную монотонную разностную схему [2]

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x} [A_{i+1/2} (1 + R_{i+1/2} \mu_{i+1/2} + R_{i+1/2}) \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} - \\ - A_{i-1/2} (1 + R_{i-1/2} \mu_{i-1/2} - R_{i-1/2}) \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x}] = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } R_{i+1/2} = -\frac{U_{i+1/2} \Delta x}{2A_{i+1/2}}, \quad \mu(R) = \begin{cases} \text{cth} R - 1/R - \text{схема Ильина} \\ \text{sign} R - \text{схема направленных разностей}, \\ 0 - \text{схема центральных разностей} \end{cases}$$

Δt и Δx – шаги по времени и пространству соответственно. Выражение в квадратных скобках (4) может браться с явного и неявного шага по времени.

При условии, что $U = \text{const}$ и $A = \text{const}$ схема (4) преобразуется к виду

$$\frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{\Delta t} - \frac{A}{\Delta x} \left[(1 + R\mu_{i+1/2} + R) \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} - (1 + R\mu_{i-1/2} - R) \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} \right] = 0. \quad (5)$$

В схеме (5) диффузионные члены аппроксимированы следующим образом:

$$A \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \approx \frac{A}{\Delta x} \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} - \frac{A}{\Delta x} \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} = \frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (6)$$

Аппроксимация адвективных членов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial UC}{\partial x} &\approx -\frac{A}{\Delta x} \left[(R\mu_{i+1/2} + R) \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} - (R\mu_{i-1/2} - R) \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} \right] = \\ &= \frac{U}{2} \mu_{i+1/2} \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} + \frac{U}{2} \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x} - \frac{U}{2} \mu_{i-1/2} \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} + \frac{U}{2} \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x} = \\ &= U \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{U\Delta x}{2} \frac{\mu_{i+1/2} C_{i+1} - \mu_{i+1/2} C_i - \mu_{i-1/2} C_i + \mu_{i-1/2} C_{i-1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Первый член в (7) является аппроксимацией адвективного члена центральной разностью, а второй член учитывает схемную вязкость, которая зависит от выбора μ .

Введем обозначения:

$$D^C(F) = U \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta x} - \text{центральная разность}; \quad (8)$$

$$D^G(F) = U \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{U\Delta x}{2} \frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{\Delta x^2} - \text{направленная разность}. \quad (9)$$

Из (7) при $\mu = \text{const}$ имеем следующую аппроксимацию адвективных членов:

$$D(F) = D^C(F) + \mu (D^G(F) - D^C(F)). \quad (10)$$

Из (10) видно, что при $\mu = 0$ получаем центрально-разностную аппроксимацию, а при $\mu = 1$ – аппроксимацию направленной разностью.

Аналогично при реализации TVD-аппроксимации¹ [3] имеем

$$D(F) = D^G(F) + \psi (D^L(F) - D^G(F)), \quad (11)$$

¹ TVD – Total Variation Diminishing – уменьшение полной вариации

где D^L – аппроксимация адвективного переноса вещества при помощи схемы Лакса-Вендроффа (при $U = const$ схема Лейта).

В обоих классах схем (10), (11) величины μ и ψ подлежат определению тем или иным способом. Рассмотрим класс схем (11). При $\psi = 0$ получаем аппроксимацию адвективного члена при помощи схемы направленной разности, а при $\psi = 1$ имеем схему Лакса-Вендроффа. Построим алгоритм выбора ψ исходя из наилучшего совпадения решения модели C с данными измерений

$$I_0 = \frac{1}{2}(C - C_{изм}, C - C_{изм})_D, \quad (12)$$

где $C_{изм}$ – данные измерений на конечный момент времени T в области $D = [0, X]$, $D_t = D \times [0, T]$. Следуя технике [4] и считая, что входным параметром численной модели является величина ψ , получаем:

$$I = I_0 + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + D(F) - A \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, C^* \right)_{Dt} + (C, C^*)_0^X + (C - C_0, C^*)_0. \quad (13)$$

Варьируя I , имеем:

$$\delta I = \delta I_0 + \left(\frac{\partial \delta C}{\partial t} + D^n(\delta F) + \delta D(F) - A \frac{\partial^2 \delta C}{\partial x^2}, C^* \right)_{Dt} + (\delta C, C^*)_0^X + (\delta C, C^*)_0. \quad (14)$$

Интегрируя по частям и выбирая C^* как решение следующей сопряженной задачи

$$-\frac{\partial C}{\partial t} - D^n(F^*) - A \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} = 0; \quad (15)$$

$$\Gamma : C^* = 0; \quad (16)$$

$$t = T : C^* = C_{изм} - C, \quad (17)$$

где $D^n(F^*) = D^G(F^*) + \psi^n(D^L(F^*) - D^G(F^*))$, $F^* = UC^*$.

Тогда имеем:

$$\delta I = (\delta D(F), C^*)_{Dt} = (\delta \psi, (D^L(F) - D^G(F)))_{Dt}, \quad (18)$$

где n – номер итерации и $\psi^0 = 0$.

Если $\psi = const$, имеем

$$\nabla_{\psi} I = \int_{Dt} (D^L(F) - D^G(F)) dD_t. \quad (19)$$

Если ψ зависит от времени, то

$$\nabla_{\psi} I = \int_0^T (D^L(F) - D^G(F)) dt. \quad (20)$$

В случае, когда ψ является функцией пространственной переменной и времени, имеем следующее выражение для градиента функционала

$$\nabla_{\psi} I = D^L(F) - D^G(F). \quad (21)$$

Итерационный спуск осуществляется по формуле

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \tau \nabla_{\psi} I, \quad (22)$$

где τ – итерационный параметр.

Аналогично, для идентификации $\mu = const$ в (11) имеем:

$$\nabla_{\mu} I = \int_{Dt} (D^G(F) - D^C(F)) dD_t. \quad (23)$$

Если μ переменная только по времени, то

$$\nabla_{\mu} I = \int_0^T (D^G(F) - D^C(F)) dt. \quad (24)$$

В случае $\mu(x, t)$ получаем:

$$\nabla_{\mu} I = D^G(F) - D^C(F). \quad (25)$$

Таким образом, среди класса схем (10) или (11) можно за счет выбора параметров μ и ψ определить разностную схему, которая наилучшим образом, в смысле минимума функционала качества прогноза, будет давать решение, согласованное с данными измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gejadze I. Yu., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.* On analysis error covariances in variational data assimilation // *J. Sci. Comput.* – 2008. – vol. 30, № 4. – P. 1847-1874.
2. *Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Склад С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2002. – 238 с.
3. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* – 1983, vol. 49 – P. 357-393.
4. *Пененко В.В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 350 с.

Материал поступил в редакцию 17.10.2011 г.

После переработки 10.11.2011 г.

АНОТАЦІЯ При чисельної реалізації варіаційних алгоритмів асиміляції даних вимірювань важлива узгодженість інформації з моделлю, в тому числі з її різницевим аналогом. Неузгодженість може виникати як за рахунок неточності задання вхідних параметрів моделі, так і за рахунок використовуваної різницевої дискретизації. Це питання вирішується шляхом ідентифікації вхідних параметрів моделі, а так само за рахунок використання додаткових членів в функціоналі якості прогнозу, що характеризують гладкість отриманого рішення.

ABSTRACT In the numerical realization of variational data assimilation algorithms, consistency of information with the model and its difference analogue is important. Inconsistencies can arise both due to inaccuracies in model input parameters, and by use of difference discretization. This question is answered by the identification of model input parameters, as well as through the use of additional terms in the cost function, which characterize the smoothness of the resulting solutions.