

Н.Г.Хоролич*, В.Н.Хоролич**

**Морское отделение Украинского научно-исследовательского
гидрометеорологического института, г.Севастополь*

***Севастопольский национальный технический университет, г.Севастополь*

ОБ УНИКАЛЬНОМ ПРОЯВЛЕНИИ ИНЕРЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЙ У КРЫМСКОГО ПОБЕРЕЖЬЯ ЧЕРНОГО МОРЯ

Используя ранее усовершенствованные векторно-алгебраический метод и полу-спектральную гидродинамическую модель, исследуется скорость течений, полученная по данным наблюдений (21 – 27 апреля 1973 г.) на шельфе Черного моря (глубина 90 м), на отдельно взятых горизонтах с точки зрения проявления ее длинноволновой структуры. Установлено, что колебания скорости течений на инерционной частоте удовлетворяют полученному ранее теоретически спектральному тензорному критерию подобия для градиентной скорости течений при преимущественно реверсивном поведении наклона уровня (в данном случае по нормали к берегу), которое действительно может быть обусловлено длинноволновыми колебаниями уровня, например, в результате проявления волноводной реакции шельфа. Эти колебания на горизонте 50 м наблюдались при среднем значении модуля скорости течений 73 см/с и его максимуме примерно 150 см/с. Установление их природы не требует определения конкретных значений наклона уровня. Показано, что при проявлении данного эффекта в условиях нерегулярного характера береговой линии и рельефа дна в принципе возможно оценить параметры соответствующего ему волнового вектора. Изложены физические основы используемой гидродинамической теории, а также приведен краткий критический обзор существующих на сегодня спектральных методов анализа векторных временных рядов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *уровень моря, течение, инерционные колебания, длинные волны, шельф, Черное море.*

К настоящему времени с помощью многочисленных данных измерений, а также теоретических исследований достоверно установлено, что значительная часть энергии течений в мезомасштабном интервале сосредоточена в сравнительно узкой полосе временных частот с центром вблизи локальной инерционной частоты, зависящей в основном от широты места. Инерционные колебания скорости течений сказываются, прежде всего, на их вращательном характере. Поэтому инерционная частота определяет многие классы длинноволновых движений. Согласно последним воззрениям, инерционные колебания возникают при передаче энергии или от ветра течениям за счет силы трения, или от свободных внутренних волн в стратифицированной среде [1 – 8].

На сегодня самым надежным источником информации о морских течениях общепринято считать данные автономных (заякоренных) буйковых станций (АБС). Несмотря на довольно значительный исторический массив этих данных, полученный для области шельф-материковый склон, он, в силу их значительной пространственно-временной перемежаемости, а также

© Н.Г.Хоролич, В.Н.Хоролич, 2010

игнорирования в большинстве случаев вдольбереговой изменчивости течений при их измерении, является, вообще говоря, малоприспособленным для исследования их длинноволновой структуры в данной области, формируемой в основном за счет проявления ее волноводных (резонансных) свойств. При этом, к сожалению, из-за сравнительно малой продолжительности рядов наблюдений (как правило, от нескольких до 10 – 15 сут) исследование данного эффекта оказывается, вообще говоря, возможным в основном в мезомасштабной области частот, главным образом, на близинерционных частотах. Поэтому в настоящее время „реанимация” этой информации по данным наблюдений, по сути, на отдельных горизонтах для исследования длинноволновой структуры течений в исследуемой области становится особенно актуальной в геофизической гидродинамике [3 – 5, 8].

Спектральное описание скорости морских течений с физической точки зрения вполне обосновано, так как непосредственно выражает интенсивность ее колебаний на разных частотах. Однако в действительности их поведение проявляется, вообще говоря, в виде суперпозиции отдельных колебательных систем, турбулентных движений, а также целого ряда известных и неизвестных динамических структур, как правило, циклически сменяющих друг друга. Поэтому обычно применяемые в физической океанографии методы спектрального анализа скорости течений позволяют формализовать эти ее особенности в виде различных спектральных характеристик, например, в виде спектрального тензора, содержащего о ней наиболее полную информацию, однако только как о колебательном процессе [8].

Основным недостатком существующей на сегодня спектральной теории морских течений является отсутствие как общепринятого метода формализации в частотной области физики поведения их скорости как неоднородного случайного векторного процесса, так и спектральной гидродинамической модели, без которой, как показывает практика, невозможна их интерпретация в терминах геофизической гидродинамики [8 – 11]. Создание такой теории позволит исследовать их гармонический (или волновой) и турбулентный характер с учетом многофакторности, разномасштабности, полициклическости и других особенностей их проявления, а также решить ряд проблем, связанных с оптимизацией наблюдений и их обработкой.

Цель данной работы – с помощью ранее разработанной полуспектральной линейной теории [7 – 13] исследовать уникальное проявление у Крымского побережья Черного моря в апреле 1973 г. инерционных колебаний скорости течений как длинноволнового процесса, характеризующегося значительными величинами ее модуля, достигающими до 150 см/с и, возможно, выше, что, однако, не удалось зарегистрировать из-за конструктивных ограничений измерителей течений типа БПВ (буквопечатающая вертушка).

В рамках данной теории удалось показать, что если в баротропном море скорость течений обусловлена преимущественно реверсивным поведением наклона уровня, то в этом случае независимо от величины его наклона ее спектральный тензор удовлетворяет так называемому тензорному критерию подобия. Поэтому, если в результате наблюдений, например, на баротроп-

ном шельфе, для какого-либо максимума спектральной энергии скорости течений установлено совпадение эмпирического и теоретического тензорных критериев подобия [12, 13], то это может свидетельствовать, вообще говоря, о преимущественно реверсивном характере поведения наклонов уровня и совпадении их направлений для соответствующих каждому из этих наклонов волн, приходящихся на длинноволновый диапазон изменчивости уровня, обуславливающий данный максимум. В этом случае эмпирический спектральный тензор скорости течений полностью определяется суперпозицией длинноволновых возмущений уровня. Зная ориентацию большой оси спектрального тензора скорости течений, соответствующего данному максимуму, можно теоретически установить направление, относительно которого осуществляется результирующее изменение вышеуказанных наклонов уровня и, следовательно, положение результирующего волнового вектора. При этом направление (знак) данного вектора определяется в зависимости от типа наблюдаемых длинноволновых возмущений уровня, однако вопрос об определении его модуля для реальных условий, а также длины соответствующей ему волны остается, вообще говоря, открытым, поскольку эти параметры, строго говоря, можно определить теоретически и то только в случае бесконечного по протяженности шельфа, для которого, в соответствии с теорией, волновое число стремится к нулю, а длина волны – к бесконечности. Проявление данного эффекта особенно характерно для области шельф-материковый склон в силу, как было уже указано выше, ее волноводных, т.е. резонансных свойств, прежде всего для определенных частот и длин волн, что в реальных условиях, вообще говоря, может в значительной степени упростить нахождение волнового вектора для длинноволновых возмущений уровня и соответствующих им возмущений скорости течений.

Кроме того, в работе получили дальнейшее развитие и некоторое уточнение ряд моментов, главным образом, методического характера, касающихся спектрального анализа временных реализаций вектора скорости морских течений по данным АБС, которые в контексте затронутых выше проблем уже рассматривались нами в предыдущих исследованиях (см., например, [12, 13]). Это позволит осуществить, на наш взгляд, заметное продвижение в их исследовании по данным наблюдений, выполненным с помощью АБС, прежде всего, на шельфе [8].

Формализация вектора скорости течений. Спектральные методы. Применяемые в настоящее время методы спектрального анализа временных реализаций вектора скорости морских течений, основанные на традиционном преобразовании Фурье, имеют, на наш взгляд, ряд существенных недостатков, обусловленных, главным образом, непоследовательностью их авторов при рассмотрении таких взаимосвязанных проблем, как реальная структура скорости течений, ее формализация (математическая модель) и свойства данного преобразования Фурье [8, 9]. Из сопоставления этих проблем следует, что основная роль при этом принадлежит последней, по-

сколькo только она определяет формализацию физики поведения исследуемого вектора.

Как известно, метод вращательных компонентов базируется на представлении вектора скорости течений в виде комплексного числа [9], а векторно-алгебраический метод – на его представлении в виде вектора в евклидовом пространстве [8]. При формализации данного вектора авторы первого метода применили интегральное преобразование Фурье в комплексном виде непосредственно, тогда как авторы другого метода применили его опосредованно, т.е. использовали для этого корреляционный тензор, очевидно, полагая, что таким образом им, в отличие от авторов первого метода, удалось абстрагироваться от априорного задания математической модели поведения данного вектора. Однако при этом, к сожалению, связь между такими основными инвариантами спектрального тензора, как линейный инвариант и индикатор вращения оказалась ими утерянной.

Авторы векторно-алгебраического метода выполнили сравнительный анализ основных спектральных характеристик скорости течений, полученных с помощью данного метода и метода вращательных компонентов, а также сделали попытку аппроксимации основных инвариантов корреляционного и спектрального тензоров вектора скорости течений [8]. При этом исходные вероятностные характеристики данного вектора были представлены в виде комбинаций авто- и взаимных спектральных плотностей его проекций на декартовы оси. Поэтому сравнение производных от них вероятностных характеристик, полученных с помощью этих методов, вполне правомерно. Однако, к сожалению, не совсем ясно, с какой именно физической точки зрения осуществлялось этими авторами данное сравнение.

Следует также отметить, что, критикуя основные положения метода вращательных моментов, авторы векторно-алгебраического метода главное внимание уделили выяснению различий между этими методами, тогда как суть проблемы заключалась в выяснении того, что их объединяет.

Некоторые не совсем физически обоснованные положения векторно-алгебраического метода, а также слишком общий и поэтому трудно интерпретируемый с физической точки зрения результат его применения явились, на наш взгляд, причиной того, что он до сих пор не получил широкого распространения в физической океанографии. Так, в рамках представленного в [8] векторно-алгебраического метода, как это ни парадоксально, практически невозможно доказать даже чисто колебательный характер поведения вектора скорости течений, поскольку получаемые с помощью его спектральные характеристики описывают кинематику данного вектора, по утверждению авторов этого метода, безотносительно к его физической природе. В этом, как они полагают, и заключается универсальность их метода.

В результате данная проблема, на наш взгляд, оказалась не доведенной до конца, поскольку в конечном итоге представленные в векторно-алгебраическом методе спектральные характеристики (инварианты) вектора скорости течений должны быть выражены также формально через параметры его чисто колебательного поведения в частотной области.

Таким образом, каждый из проанализированных выше спектральных методов анализа поведения вектора скорости течений, даже если абстрагироваться от некоторых моментов субъективизма и несущественных неточностей, допущенных их авторами, представляет собой в лучшем случае лишь половинчатое решение рассматриваемой проблемы. Единственным утешением здесь может служить то, что эти решения, дополняя друга, позволяют, в принципе, получить хотя и полное, однако всего лишь формальное, представление о чисто колебательных свойствах исследуемого векторного временного процесса, определяемое особенностями обычного преобразования Фурье.

Поэтому эти методы, к сожалению, лишь только после устранения в них ряда неточностей, моментов субъективизма и ошибочных предположений, допущенных как самими авторами, так и их критиками и последователями, позволяют, в принципе, формализовать в инвариантной форме основные особенности физики поведения вектора скорости течений в виде как спектрального тензора [8], так и соответствующего ему (этому тензору) поляризованного (в горизонтальной плоскости в силу двумерности течений) эллипса вращения данного вектора [9], которые содержат наиболее полную информацию о его колебательных свойствах. При этом ориентация большой оси симметричной части данного тензора совпадает с ориентацией большой оси соответствующего ему эллипса. Однако следует иметь в виду, что эта ориентация в рамках векторно-алгебраического метода определяется с точностью $\pm 180^\circ$.

Этому поляризованному эллипсу вращения вектора скорости течений как кривой второго порядка (без учета знака его поляризации) можно поставить в соответствие аналогичную тензорную кривую симметричной части спектрального тензора, а мере его (эллипса) поляризации – индикатор вращения этого тензора, т.е. инвариант его асимметричной части, если абстрагироваться от того факта, что последний является мнимой величиной [8].

В случае подобия поляризованных эллипсов вращения вектора скорости течений должно иметь место совпадение их коэффициентов сжатия K , знаков поляризации Θ и ориентации больших осей α_ε , что позволяет ввести для этих эллипсов критерий подобия K_ε как суперпозицию скалярного ΘK и векторного $\mathbf{E} = \cos \alpha_\varepsilon + i \sin \alpha_\varepsilon$ параметров [12, 13]. Далее с целью удобства рассуждений введем коэффициент $K_c = \Theta K$, который будем именовать коэффициентом подобия.

Спектральная тензор-функция скорости течений $\mathbf{S}$ (далее просто тензор) является преобразованием Фурье корреляционной тензор-функции и может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной ее частей [8]:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{uu} & S_{uv} \\ S_{vu} & S_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{uu} & C_{uv} \\ C_{uv} & S_{vv} \end{pmatrix} - i Q_{uv} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + 0,5 \mathbf{D} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где S_{uu} , S_{vv} – автоспектры составляющих скорости течений u и v , $S_{uv} = C_{uv} - iQ_{uv}$, $S_{vu} = C_{uv} + iQ_{uv}$, а C_{uv} , Q_{uv} – коспектр и квадратурный спектры соответственно, $\lambda_{1,2}$ – собственные числа (главные оси) симметричной части $\mathbf{S}$, а $\mathbf{D}$ – функция, имеющая смысл индикатора вращения:

$$\mathbf{D} = S_{uv} - S_{vu} = iD = -2iQ_{uv}. \quad (2)$$

Как впервые было показано в [12], для коэффициента сжатия K эллипса вращения и индикатора вращения $\mathbf{D}$ вектора скорости течений выполняются следующие соотношения:

$$K = (\lambda_2/\lambda_1)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D}(\omega) = 2i\Theta K \lambda_1 = 2i\Theta(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} = 2i\Theta(I_2)^{1/2}, \quad (4)$$

где I_2 – квадратичный инвариант симметричной части тензора $\mathbf{S}$, который совпадает с детерминантом симметричной матрицы в (1).

Итак, для индикатора вращения $\mathbf{D}$ и квадратурного спектра Q_{uv} имеем следующие их выражения:

$$\mathbf{D}(\omega) = -2iQ_{uv} = 2i\Theta (S_{uu}S_{vv} - C_{uv}^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Тогда вместо последнего выражения в (1) получим следующее выражение для спектрального тензора $\mathbf{S}$ вектора скорости течений:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \Theta(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \Theta(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} i \\ -\Theta(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2} i & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что детерминант матрицы спектрального тензора $\mathbf{S}$ в виде (6) равен нулю.

Из анализа выражений (2) – (6) следует, что с их помощью можно оценить на практике погрешность определения основных инвариантов спектрального тензора вектора скорости течений, а также ориентации главной оси его симметричной части. Впрочем, данное замечание касается и спектральных характеристик данного вектора, полученных с помощью метода вращательных компонентов [9].

Таким образом, результаты спектрального анализа вектора скорости течений, полученные ранее как авторами векторно-алгебраического метода [8], так и их последователями с помощью выражений (2) – (6) сравнительно легко могут быть выражены также в терминах метода вращательных компонентов [9].

Учитывая, что $I_1 \geq |\mathbf{D}|$ [8], матрицу тензора $\mathbf{S}$ в виде (6) для дальнейшего анализа удобно пронормировать (делением ее элементов) на I_1 :

$$\mathbf{K}_T = \begin{pmatrix} (1+K^2)^{-1} & 0 \\ 0 & K^2(1+K^2)^{-1} \end{pmatrix} + \frac{\Theta K i}{1+K^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Следовательно, спектральный тензор $\mathbf{K}_T$ скорости течений (7) с учетом угла ориентации α_ε главной оси его симметричной части в принятой системе координат является, по сути, тензорным аналогом приведенного выше критерия подобия $\mathbf{K}_\varepsilon$, поскольку содержит в себе такие же характеристики соответствующего ему эллипса, что и $\mathbf{K}_\varepsilon$. Поэтому в дальнейшем будем по-

лагать, что $\mathbf{K}_T \equiv \mathbf{K}_e$. При этом угол α_e определяется через автоспектры S_{uu} , S_{vv} и коспектр C_{uv} составляющих скорости течений u и v соответственно (формула (1)) [8].

Таким образом, с помощью этих методов, основанных на обычном преобразовании Фурье, можно получить формализацию исследуемого вектора, соответствующую только чисто колебательному характеру его поведения в частотной области. Поэтому на сегодня при исследовании морских течений одной из первоочередных задач является доказательство, прежде всего, именно такого характера их поведения, что, однако, как показывает практика, возможно осуществить только в рамках гидродинамической теории.

Проблема учета многофакторности и ее решение. Как известно, в силу известных затруднений, возникающих при получении информации о морских течениях [8], проблема конкретизации как самих воздействующих факторов, так и их значений является на сегодня в геофизической гидродинамике практически неразрешимой, поскольку среди них, кроме известных факторов (выбор которых на практике, впрочем, субъективен), могут быть и неизвестные факторы, причем механизмы проявления некоторых из них как из первых, так и из вторых факторов могут быть, вообще говоря, неизвестными.

Если не принимать во внимание горизонт измерений течений, некоторые общепринятые в геофизической гидродинамике параметры, а также морфометрию дна, то, как уже указывалось выше, вследствие значительной пространственно-временной перемежаемости данных наблюдений, единственным источником информации о течениях являются, вообще говоря, только их временные реализации на отдельных горизонтах.

Поэтому, строго говоря, в силу отсутствия конкретных сведений о воздействующих факторах, единственным источником информации о них и предполагаемых механизмах их проявления, особенно на предварительной стадии анализа, являются, пожалуй, не столько характеристики спектрального тензора измеренного вектора скорости течений, сколько соотношения между его основными инвариантами, которые вместе с ориентацией большой оси его симметричной части представляют собой соответствующий ему спектральный тензорный критерий подобия $\mathbf{K}_T$.

Как показали наши предыдущие исследования [13], проблема учета многофакторности при исследовании морских течений, т.е. учета всех без исключения воздействующих факторов и соответствующих им механизмов влияния на течения (при этом количество вторых, в отличие от первых, вообще говоря, ограничено), в принципе, может быть решена в рамках линейной теории, однако только относительно теоретического спектрального тензорного критерия подобия $\mathbf{K}_T$. Вполне очевидно, что для этого спектральный тензор измеренной скорости течений достаточно представить в виде суперпозиции, вообще говоря, бесконечного количества спектральных тензоров, каждый из которых, с одной стороны, должен удовлетворять ее тензорному критерию подобия $\mathbf{K}_T$, а с другой – являться результатом воздействия на течения всех факторов посредством соответствующих им механизмов. Если иметь в виду теоретический аспект данной проблемы, то этого

можно достичь, пожалуй, только в том случае, если в основе действия всех факторов – одни и те же механизмы их воздействия на течения.

Данная проблема значительно упрощается, когда при ограниченном количестве известных механизмов, посредством которых осуществляется воздействие соответствующих им факторов на течения, удастся найти ее аналитическое решение в частотной области, используя при этом только некоторое фундаментальное свойство скорости течений и соответствующую ему некоторую гидродинамическую характеристику, определяющую ее генезис и структуру, без конкретизации на предварительной стадии анализа как этих факторов, так и значений данной характеристики. На основе полученного таким образом решения сравнительно легко можно найти аналитическое выражение для теоретического спектрального тензорного критерия подобия K_T . Именно в однозначном установлении этого фундаментального свойства скорости течений и заключается универсальный характер применимости на практике критерия K_T , для чего вполне достаточно сравнить его теоретическое значение с эмпирическим. Как будет показано несколько ниже, для нахождения данного критерия не требуется использование гидродинамической модели.

Следовательно, исследование измеренных течений с целью установления их генезиса и структуры необходимо начинать с выяснения не столько роли самих воздействующих факторов, сколько особенностей проявления соответствующих им механизмов их влияния на течения, абстрагируясь при этом как от конкретизации этих факторов, так и их значений. На следующей стадии исследования путем последовательного задания конкретных значений основных воздействующих факторов можно попытаться установить роль каждого из них в генерации измеренной скорости течений и, в конечном счете, даже роль неизвестных факторов.

Такими образом, в данной теории спектральный тензорный критерий подобия K_T находится не непосредственно с помощью воздействующих факторов и соответствующих им механизмов влияния на течения, а опосредованно, т.е. с помощью других гидродинамических параметров как результата действия данных факторов. При этом физика поведения этих параметров должна полностью определять данный критерий без конкретизации их значений.

Как уже было нами показано [13], такой подход, в принципе, осуществим в некоторых очень важных с точки зрения как теории, так и практики случаях. Так, длинноволновая структура скорости течений и ее градиентное происхождение, в принципе, уже сравнительно легко могут быть установлены даже в случае отсутствия каких-либо сведений о воздействующих факторах, например, для шельфа и материкового склона баротропного моря с помощью полуспектральной линейной гидродинамической теории по ее измерению только на одном горизонте, если при этом имеет место совпадение эмпирического и теоретического критериев подобия ее спектрального тензора.

Итак, если абстрагироваться от чисто дрейфовых течений, которые, вообще говоря, существенны только в верхнем слое трения, то течения в баротропном море независимо от своего происхождения являются, по сути, градиентными, поскольку определяются только наклонами уровня. Однако, например, в области шельф-материковый склон градиентные течения в случае проявления ее волноводных (резонансных) свойств, вообще говоря, могут значительно превышать чисто дрейфовые течения, т.е. пронизывать всю толщу вод, имея при этом в основном длинноволновый характер. Таким образом, исследование генезиса и структуры течений в этой области с учетом данного механизма их формирования представляет особый интерес.

В рамках ранее разработанной полуспектральной линейной теории морских течений, представляющей собой, по сути, обобщение известной в теории морских течений задачи Экмана (подробнее см. несколько ниже), нами было установлено [12, 13], что если временные изменения наклона уровня имеют преимущественно реверсивный характер (например, вследствие вдольберегового прохождения длинноволновых его возмущений на шельфе), то имеет место подобие спектральных тензоров соответствующей им градиентной скорости течений, которое не зависит от наклона уровня и наклона дна и определяется только глубиной места, вертикальной координатой, вязкостью, параметром Кориолиса и частотой (данная модель в несколько сокращенном виде представлена ниже).

Следовательно, если для эмпирического спектрального тензорного критерия подобия установлено, что он удовлетворяет своему теоретическому аналогу, то в данном случае скорость течения имеет градиентное происхождение за счет линейной суперпозиции, вообще говоря, однонаправленно перемещающихся длинноволновых возмущений уровня.

Таким образом, с помощью данной теории удалось показать, как в отдельных случаях при отсутствии каких-либо сведений о воздействующих факторах можно в принципе исследовать фундаментальные свойства искомых физических параметров (их структуру и генезис), используя для этого всего лишь вполне очевидные в анализируемой физической ситуации особенности поведения некоторых вспомогательных физических параметров, которые полностью определяют искомые физические параметры. Важно отметить, что при этом не требуется конкретизация значений этих вспомогательных физических параметров, несмотря на то, что они, как и искомые физические параметры, представляют собой результат воздействия данных факторов.

Полуспектральная модель. Следуя [10, 12, 13], рассмотрим задачу о поведении градиентной скорости течений в однородном море произвольной глубины при изменении наклона уровня преимущественно в одном направлении, то есть в случае, когда оно имеет квазиреверсивный характер.

Решение данной задачи наиболее просто находится для бесконечного шельфа с прямолинейным берегом и глубиной, которая изменяется только по нормали к нему. При этом учитываются силы вертикального и горизонтального трения, Кориолиса, трения на дне, а также наклоны уровня по

нормали к берегу. Начало декартовых координат расположено на невозмущенной поверхности моря. Горизонтальные оси координат Ox и Oy направлены соответственно вдоль берега и в сторону моря, а вертикальная ось Oz – вниз. Система координат – правая.

Поскольку в задаче исследуется поведение градиентной скорости течений с точки зрения влияния на нее только указанного выше характера изменения наклона уровня, то для ее решения достаточно получить формальное соотношение между данной скоростью и наклоном уровня. Тогда уравнения движения для вязкой однородной жидкости, граничные условия на поверхности и на дне в линейном приближении можно записать в виде:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - (R + if)W = -gG, \quad (8)$$

$$A \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad W|_{z=H} = 0, \quad (9)$$

где
$$W = u + iv, \quad G = i \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (10)$$

В этих уравнениях и граничных условиях: W , u , v – скорость течения и ее составляющие вдоль действительной и мнимой осей декартовых координат Ox и Oy соответственно; t – время; A – кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена; R – коэффициент горизонтального трения (при его учете используется известная гипотеза, согласно которой турбулентное трение, обусловленное горизонтальным обменом количеством движения, пропорционально скорости течения), i – мнимая единица; $f = 2\Omega \sin \varphi$ – параметр Кориолиса (здесь Ω – угловая скорость вращения Земли, φ – широта места, $f > 0$ в Северном полушарии); g – ускорение силы тяжести; ζ – уровень (отклонение поверхности моря от невозмущенного горизонтального положения $z = 0$); $H = H(y)$ – глубина места.

Выражение для скорости течений W , а также для наклона уровня G представим в виде рядов Фурье по временной координате t [9]:

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n \exp(i\omega_n t), \quad n \neq 0, \quad (11)$$

где W_n – комплексные коэффициенты Фурье функции W , зависящие от переменных y и z , а ω_n – угловая частота (в дальнейшем с целью сокращения записи при этих и других коэффициентах, а также при ω_n вместо индекса n будет использоваться только его знак).

Коэффициенты Фурье $W_{\pm}$ представим в следующем виде [9]:

$$2W_{\pm} = u_a \pm v_b + i(v_a \mp u_b) = |W_{\pm}| \exp(i\psi_{\pm}), \quad (12)$$

где u_a , u_b , v_a , v_b – коэффициенты Фурье проекций скорости течений u и v на оси координат Ox и Oy соответственно (индексы a и b означают косинус- и синус-разложение по координате t), а $\psi_{\pm} = \arctg[(v_a \mp u_b)/(u_a \pm v_b)]$.

Составляющие W_+ и W_- вектора скорости течений (как, впрочем, и составляющие G_+ и G_- наклона уровня), вращаясь соответственно в

положительном и отрицательном направлениях относительно оси Ox , описывают при этом, вообще говоря, эллипс, большая ось которого образует с ней угол, равный полусумме их фазовых углов. Его большая полуось равна сумме модулей этих составляющих, а малая – их разности. При этом знак поляризации эллипса определяется знаком направления вращения большей по модулю составляющей [9].

Комплексные коэффициенты Фурье для наклона уровня $G_{\pm}$ по аналогии с (11) и (12) имеют следующий вид:

$$2G_{\pm} = \pm \frac{\partial \zeta_b}{\partial y} + i \frac{\partial \zeta_a}{\partial y}, \quad (13)$$

где ζ_a, ζ_b – коэффициенты Фурье по t для отклонения уровня ζ от $z = 0$.

Решение уравнения (1) для $W_{\pm}$ известно [10, 12, 13]:

$$W_{\pm} = (B_{\pm} - iq\Lambda_{\pm})G_{\pm}, \quad (14)$$

где $B_{\pm} = f_1 f_3 + r f_2 f_4$, $\Lambda_{\pm} = f_1 f_4 - r f_2 f_3$, $q = \text{sign}(f + \omega_{\pm})$, (15)

$$f_1 = 1 - r(\text{ch}\theta_{\pm}^a \cos\eta_{\pm}^b + \text{ch}\eta_{\pm}^a \cos\theta_{\pm}^b), \quad f_2 = \text{sh}\theta_{\pm}^a \sin\eta_{\pm}^b + \text{sh}\eta_{\pm}^a \sin\theta_{\pm}^b,$$

$$f_3 = (a_{\pm}^2 - b_{\pm}^2)f_5, \quad f_4 = 2a_{\pm}b_{\pm}f_5, \quad f_5 = g/A(a_{\pm}^2 + b_{\pm}^2)^2, \quad r = 1/(\text{ch}2a_{\pm}H + \cos2b_{\pm}H),$$

$$a_{\pm} = (f_6 + R)^{1/2}, \quad b_{\pm} = (f_6 - R)^{1/2}, \quad f_6 = [(f + \omega_{\pm})^2 + R^2]^{1/2}/2A,$$

$$\eta_{\pm}^a = a_{\pm}H(1 - z/H), \quad \eta_{\pm}^b = b_{\pm}H(1 - z/H),$$

$$\theta_{\pm}^a = a_{\pm}H(1 + z/H), \quad \theta_{\pm}^b = b_{\pm}H(1 + z/H).$$

На основе сравнительного анализа метода вращательных компонентов [9] и векторно-алгебраического метода [8] в [12, 13], в частности, установлено, что спектральные характеристики вектора скорости течений, полученные в терминах первого из них, дают возможность, в принципе, сравнительно легко получить основные инварианты соответствующего ему спектрального тензора. При этом ориентация и знак поляризации эллипса вращения результирующего вектора скорости течений совпадают соответственно с ориентацией главной оси симметричной части данного тензора и знаком одного из основных его инвариантов – индикатора вращения (формулы (2) – (5)).

Анализ полученных решений. Из совместного анализа выражений (13) и (14) следует, что при реверсивном характере поведения наклона уровня во времени относительно какого-либо направления, например, нормали к берегу, разнонаправленно вращающиеся составляющие градиентной скорости течений определяются одинаковыми по модулю и ориентированными симметрично относительно данного направления соответствующими им составляющими наклона уровня. Поэтому выражение для определения угла ориентации α эллипса (т.е. его большой оси) градиентной скорости течений относительно берега (отсчитываемый от его направления против часовой стрелки) будет иметь следующий вид [12, 13]:

$$\alpha = (\pi - \Delta_+ - q\Delta_-)/2, \quad (16)$$

где $\Delta_{\pm}$ – угол между составляющей градиентной скорости течений и соответствующей ей составляющей наклона уровня $G_{\pm}$ (в соответствии с (14) $\Delta_{\pm} > 0$).

Из анализа выражения для градиентной скорости течений (14) следует, что независимо от величины наклона уровня соответствующие ей эллипсы вращения будут подобными, поскольку для них коэффициенты сжатия

$$K = |A_* - B_*| / (A_* + B_*), \quad K \in [0, 1], \quad (17)$$

где $A_* = |B_+ - iq\Lambda_+|$, $B_* = |B_- - iq\Lambda_-|$, знаки поляризации вращения и углы ориентации совпадают.

Таким образом, если в баротропном море временные изменения наклона уровня имеют преимущественно реверсивный характер, то, вообще говоря, имеет место подобие эллипсов вращения соответствующей ему градиентной скорости течений, которое не зависит от наклона уровня и наклона дна, поскольку определяется только комплексными коэффициентами градиентного дрейфа $B_{\pm} - iq\Lambda_{\pm}$, т.е. глубиной места, горизонтом (вертикальной координатой z), вязкостью, трением на дне, параметром Кориолиса f , ускорением силы тяжести g , частотой $\omega_{\pm}$, а также ориентацией этих коэффициентов на комплексной плоскости.

Строго говоря, с помощью существующих на сегодня методов наблюдений и гидродинамического моделирования квазиреверсивный характер поведения наклона уровня установить практически невозможно, прежде всего, в силу недостаточного количества наблюдений за ним, особенно в открытом море. Данное затруднение, на наш взгляд, можно преодолеть, если при этом использовать имеющиеся на сегодня наблюдения за течениями в области шельф-материковый склон, спектры которых содержат максимумы, явно обусловленные проявлением волноводных (резонансных) свойств данной области, приходящимся на длинноволновый диапазон изменчивости течений. Вполне очевидно, что при этом, вообще говоря, ориентации волновых чисел для длинноволновых возмущений уровня, соответствующих данному диапазону, должны быть примерно одинаковыми. Следовательно, совпадение в этом случае эмпирического тензорного критерия подобия с его теоретическим аналогом для спектрального тензора скорости течений и указывает на квазиреверсивный характер поведения наклона уровня.

Характеристика данных наблюдений и их анализ. В настоящей работе исследовалась скорость течений у Крымского побережья Черного моря, полученная за период 21 – 27 апреля 1973 г. на АБС (горизонты 25 и 50 м) с помощью буквопечатающих вертушек типа БПВ (рис.1).

Предварительная обработка временных рядов скорости течений заключалась в проверке их на грубые выбросы, высокочастотной фильтрации и оценке низкочастотного тренда [8]. При анализе используется левая, т.е. азимутальная, как это обычно принято в океанографии, система координат. Низкочастотная фильтрация временных рядов скорости течений осуществлялась с помощью косинус-фильтра.

В табл.1 приведены основные характеристики скорости течений на анализируемых горизонтах 25 и 50 м: азимут средней скорости течений $A_{зср}$, средние значения скорости течений $W_{ср}$ и ее модуля $M_{ср}$, максимальный $M_{дmax}$ и минимальный $M_{дmin}$ модули скорости течений, среднее квадратическое отклонение для ее модуля σ , а также устойчивость течений $W_{ср}/M_{ср}$.

Корреляционные и спектральные тензоры скорости течений для исследуемых горизонтов (рис.2 и табл.2) рассчитывались с помощью векторно-алгебраического метода, основные положения которого и методика по его применению наиболее полно представлены в [8]. Однако следует заметить, что при расчете и последующем анализе спектральных тензоров скорости

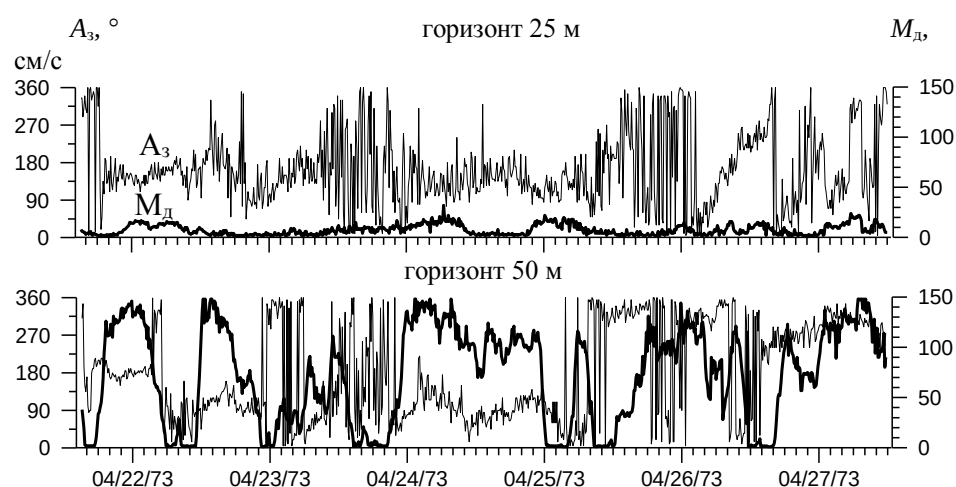
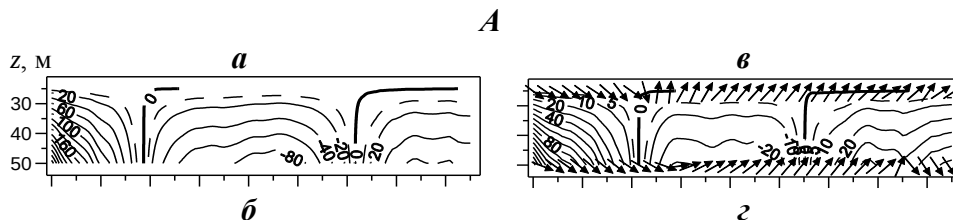


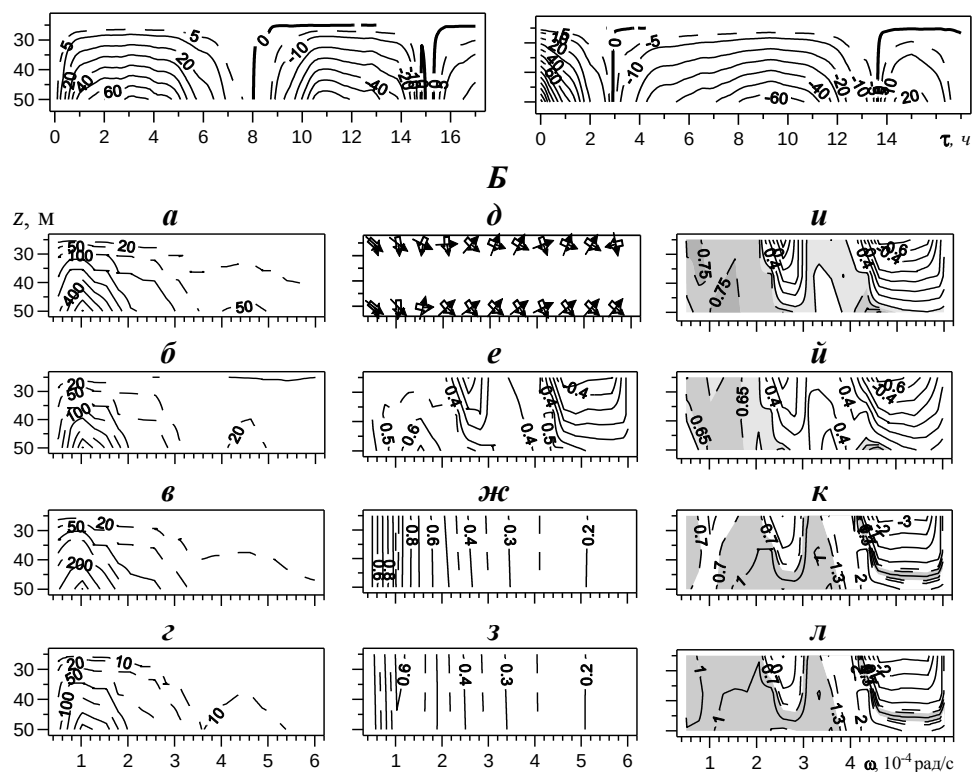
Рис. 1. Временная изменчивость вектора скорости течений на АБС у Крымского побережья Черного моря (21 – 27 апреля 1973 г.)

Таблица 1. Основные характеристики скорости течений на АБС у Крымского побережья Черного моря (21 – 27 апреля 1973 г.)

$z, \text{ м}$	$\Delta t, \text{ мин}$	N	$A_{зср}, ^\circ$	$W_{ср}, \text{ см/с}$	$M_{ср}, \text{ см/с}$	$M_{дmax}, \text{ см/с}$	$M_{дmin}, \text{ см/с}$	$\sigma, \text{ см/с}$	$W_{ср}/M_{ср}$
25	10	846	135	3,5	7,6	32	2	5,2	0,46
50	—	—	57	13,9	72,9	148	1	48,1	0,19

Примечание: Δt – дискретность наблюдений, N – количество наблюдений





Р и с . 2. Характеристики корреляционного (А) и спектрального (Б) тензоров скорости течений у Крымского побережья Черного моря (21 – 27 апреля 1973 г.): А – линейный инвариант I_k (а), индикатор вращения D_k (б), собственные числа $L_{1,2}$ (в $10 \text{ см}^2/\text{с}^2$) и азимут α_k (изображен стрелкой) большой оси L_1 симметричной части корреляционного тензора (в, г); Б – линейный инвариант I_1 (а), индикатор вращения D (б), собственные числа λ_1 и λ_2 (в $10^4 \text{ см}^2/(\text{рад}\cdot\text{с})$) (в, г), большая стрелка – азимут α_s большой оси λ_1 спектрального тензора; широкая и короткая стрелки – азимуты условного берега для эллипсов градиентной скорости течений при $R = 0$ и $5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ соответственно (д), K_c (е), K_0 ($R = 0$) (ж), K_R ($R = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$) (з), $K_w = K_c/K_e$ (и), $K_v = K_d/K_c$ (й), $E_0 = K_c/K_0$ (к), $E_R = K_c/K_R$ (л).

Т а б л и ц а 2. Корреляционные (в $\text{см}^2/\text{с}^2$, сдвиг $\tau = 0$) и спектральные (в $10^4 \text{ см}^2/(\text{рад}/\text{с})$, $\omega_i \approx 1,027 \cdot 10^{-4} \text{ рад}/\text{с}$) характеристики скорости течений на АБС у Крымского побережья Черного моря (21 – 27 апреля 1973 г.).

$z, \text{ м}$	$I_k(\tau)$	$L_1(\tau)$	$L_2(\tau)$	$\alpha_k(\tau), \text{ }^\circ$	$I_1(\omega_i)$	$D(\omega_i)$	$\lambda_1(\omega_i)$	$\lambda_2(\omega_i)$	$\alpha_s(\omega_i), \text{ }^\circ$	$T_i, \text{ ч}$
25	39,6	22,4	17,2	127	8,22	3,41	6,05	2,17	125	17,08
50	2913	1569	1344	117	709	344	452	257	134	—

Примечание: T_i – инерционный период.

течений были учтены вышеприведенные замечания относительно отдельных неточностей и субъективных моментов, содержащихся в [8].

В табл.2 представлены некоторые основные характеристики корреляционных и спектральных тензоров скорости течений для исследуемых гори-

зонтов. Условные обозначения этих характеристик приведены на рис.2, на котором в дополнение к основным характеристикам спектральных тензоров скорости течений приведены также некоторые вспомогательные функции (см. далее), полученные теоретически с помощью приведенной выше гидродинамической модели.

Корреляционный тензор $\mathbf{K}_v(\tau)$ характеризует взаимосвязь направленных изменений скорости течений при сдвиге во времени τ , дает количественную меру интенсивности этих изменений и их ориентацию в заданной системе координат. Наиболее наглядно это выражается с помощью различных инвариантов симметричной и кососимметричной частей тензора $\mathbf{K}_v(\tau)$ [8].

Абсолютное значение линейного инварианта $|I_k(\tau)|$ и индикатора вращения $|D_k(\tau)|$ корреляционного тензора характеризует модуль коллинеарных и ортогональных изменений векторов скорости течений для интервала времени (сдвига) τ соответственно. Если знак $I_k(\tau)$ положительный (отрицательный), то взаимосвязь на интервале τ определяется преимущественно однонаправленными (противоположно направленными) составляющими ее векторов. Если знак $D_k(\tau)$ положительный (отрицательный), то это означает, что векторы скорости течений при сдвиге τ ориентированы преимущественно вправо (влево) относительно ее вектора $\mathbf{V}(t)$.

Инварианты $L_{1,2}(\tau)$ есть главные, или собственные значения симметричной части корреляционного тензора $\mathbf{K}_v(\tau)$. Они являются экстремальными значениями корреляционных функций проекций скорости течений на ортогональные оси координат. Им можно поставить в соответствие большую и малую оси центральной кривой второго порядка, соответствующей симметричной части данного тензора. Эти инварианты определены относительно собственного базиса тензора $\mathbf{K}_v(\tau)$, ориентация (азимут) которого $\alpha_k(\tau)$ в виде графика представлена на рис.2. Отметим, что при $\alpha_k(\tau)$, кратном $\pi/2$, инва-

рианты $L_{1,2}(\tau)$ совпадают с корреляционными функциями проекций вектора скорости течений на ортогональные оси координат.

Коррелограммы $L_{1,2}(\tau)$ на каждом из исследуемых горизонтов, как следует из рис.2, на начальном участке значений τ несколько различаются как по декременту затухания, так и цикличности колебаний, что свидетельствует о влиянии на течения как приливных, так и инерционных колебаний. Период флуктуаций инварианта $L_1(\tau)$, соответствующий периоду полусуточных колебаний приливных течений, отсутствие такового для инварианта $L_2(\tau)$, а также незначительные изменения ориентации собствен-

ного базиса $\alpha_k(\tau)$ тензора $\mathbf{K}_v(\tau)$, особенно на горизонте 50 м, указывают на то, что данные колебания имеют отчетливо реверсивный характер.

Обращает на себя внимание тот факт, что когерентности графиков $\alpha_k(\tau)$ с флуктуациями коррелограмм $L_{1,2}(\tau)$ для анализируемых горизонтов несколько различаются. Кроме того, отметим, что ориентация $\alpha_k(\tau)$, в силу того, что инварианты $L_{1,2}(\tau)$ могут одновременно принимать и отрицательные значения, с физической точки зрения должна указывать на ориентацию большой, а не малой оси (как это следует из принято нами здесь несколько формального подхода) кривой второго порядка (эллипса), соответствующей данной физической ситуации. Эти и другие обстоятельства в значительной степени осложняют анализ корреляционной структуры скорости течений с помощью инвариантов $L_{1,2}(\tau)$ и делают целесообразным проведение его по коррелограммам $I_1(\tau)$ и $D_k(\tau)$.

Такие инварианты спектрального тензора $S(\omega)$, как линейный, или первый инвариант $I_1(\omega)$ и индикатор вращения $\mathbf{D}(\omega) = iD(\omega)$ характеризуют соответственно распределение модуля интенсивности и ортогональных составляющих изменений скорости течений в частотной области, причем $|iD(\omega)| \leq I_1(\omega)$. При этом $|D(\omega)|$ описывает модуль этих изменений, знак $D(\omega)$ – направление вращения, а символ i – фазовый сдвиг относительно $I_1(\omega)$, равный $\pi/2$. Если $D(\omega) = 0$, то это, вообще говоря, свидетельствует о том, что модули интенсивности вращательных изменений скорости течений обоих знаков одинаковы. Инварианты спектрального тензора $\lambda_{1,2}(\omega) = |\lambda_{1,2}(\omega)|$ – собственные значения его симметричной части, а $\lambda_{1,2}(\omega)$ – ее главные оси, причем $\lambda_1 + \lambda_2 = I_1(\omega)$. Инварианты $\lambda_{1,2}(\omega)$ являются экстремальными значениями спектральных плотностей проекций скорости течений по ортогональным направлениям.

Положение каждого из выявленных пиков оценки спектра на оси частот (в основном это касалось инерционного пика) уточнялось при таких значениях параметров спектрального анализа, чтобы для дискретности наблюдений $\Delta t = 10$ мин и периода низкочастотной фильтрации 36 ч пик, насколько это возможно, совпадал с соответствующими ему узловыми точками данной оси. Так, в анализируемых здесь случаях рассчитанное положение инерционного пика на оси частот (период $T_i = 17$ ч) фактически совпало с его теоретическим значением $T_i = 17,08$ ч для широты точки наблюдений. Достоверность оценок спектра определялась с помощью общепринятого подхода [8].

При анализе спектрального тензора вектора скорости течений для каждого исследуемого горизонта его критерий подобия, рассчитанный с помощью усовершенствованного выше векторно-алгебраического метода, сравнивался с его теоретическим значением, полученным в рамках полуспектральной линейной теории морских течений.

На практике представляет интерес определение в первую очередь точности оценки коэффициента подобия K_c эллипса вращения исследуемого вектора для предполагаемого гармонического (или волнового), которую, как это следует из анализа выражений (3) и (4), можно найти с помощью двух независимых оценок K_c и K_d коэффициента сжатия K :

$$K_c = \text{sign}(D)(K_\varepsilon + K_d)/2, \quad (18)$$

$$\text{где } K_\varepsilon = (\lambda_2/\lambda_1)^{1/2}, \quad K_d = |D|/2\lambda_1. \quad (19)$$

Кроме того, для проверки точности предлагаемого здесь подхода необходимо использовать, по крайней мере, следующие дополнительные параметры и критерии:

1) критерии K_w и K_v , указывающие на точность расчета исследуемого гармонического процесса по степени близости коэффициентов K_c , K_ε и K_d :

$$K_w = K_c / K_\varepsilon, \quad K_v = K_d / K_c; \quad (20)$$

2) теоретические коэффициенты подобия для спектрального тензорного критерия подобия K_0 и K_R соответственно для значений коэффициента горизонтального трения $R = 0$ и $R = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$;

3) критерии E_0 и E_R соответствия эмпирического коэффициента подобия K_c его теоретическим значениям K_0 и K_R для предполагаемой градиентной скорости течений при $R = 0$ и $R = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ соответственно:

$$E_0 = K_c / K_0, \quad E_R = K_c / K_R; \quad (21)$$

4) углы ориентации относительно берега α_ε и α_ε^* (с целью удобства анализа отсчитываемые в азимутальной системе, т.е. по часовой стрелке) большой оси λ_1 симметричной части теоретического тензорного критерия подобия для градиентной скорости течений при $R = 0$ и $R = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ соответственно (α_ε – широкая стрелка, α_ε^* – короткая стрелка).

Данный подход был уже успешно апробирован при анализе спектральных тензоров скорости течений на шельфе Черного моря [13].

Для анализируемых нами реализаций скорости течений кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена $A = 0,01 \text{ м}^2/\text{с}$, а коэффициент горизонтального трения $R = 0$ и $R = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Установлено, что учет горизонтального трения позволил в данном случае получить лучшее соответствие между эмпирическим и теоретическим значениями критерия подобия спектрального тензора исследуемого вектора. Однако следует заметить, что это достигалось, в основном, за счет улучшения оценки коэффициента подобия K_ε . Задавая различные физически обоснованные значения коэффициентов A и R можно, в принципе, попытаться достичь наилучшего (оптимального) совпадения эмпирического и теоретического значений данного критерия.

Как следует из рис.2 и 3, в данном анализе некоторую трудность представляет определение ориентации условного берега, поскольку с ней связано также, как было показано выше, определение ориентации эллипса вращения градиентной скорости течений с помощью гидродинамической модели.

Это вполне очевидно, поскольку в реальных условиях, определение ориентации области шельф – материковый склон является, вообще говоря, проблематичным. Несмотря на то, что длина исследуемых волновых возмущений,

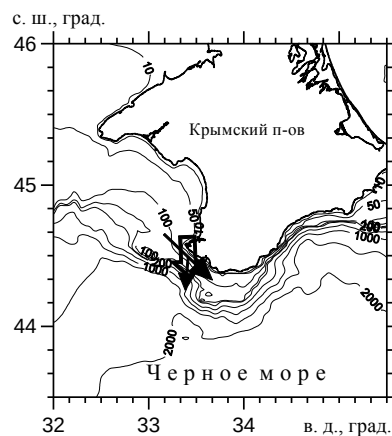


Рис. 3. Ориентация оси λ_1 спектрального тензора скорости течений и волнового вектора градиентной скорости течений для инерционной частоты на горизонте 50 м у Крымского побережья Черного моря 21 – 27 апреля 1973 г. Условные обозначения см. на рис.2.

определяющих фактически полностью поведение скорости течений на частоте пика ее спектра теоретически равна бесконечности, в реальных условиях ее (эту длину) все же можно оценить, если для этого использовать длину условного берега, которая в данном случае физически ограничена конечным участком области шельф – материковый склон.

Решение данной проблемы значительно упрощается, если принять во внимание то обстоятельство, что азимут α_s большой оси λ_1 эмпирического спектрального тензора скорости течений должен, в принципе, совпадать с азимутом аналогичной оси соответствующего ему теоретического спектрального тензора для градиентной скорости течений.

Далее, из приведенной здесь теории следует, что для определения азимута условного берега к указанному выше азимуту α_s необходимо прибавить острый угол α , который можно определить с помощью формулы (16). Как следует из анализа рис.2 и 3, инерционные колебания анализируемой скорости течений на горизонте 50 м генерировались, по-видимому, длинноволновыми возмущениями скорости течений, пространственный масштаб которых не превышал 100 км.

Выводы. В результате анализа установлено, что особенности генезиса и структуры течений в области шельф – материковый склон у Крымского побережья Черного моря могут определяться в основном длинноволновыми возмущениями уровня (для которых характерно их квазиреверсивное поведение по нормали к данной области) очевидно резонансного происхождения вследствие проявления здесь эффекта захвата энергии. Особенно впечатляют результаты, полученные для инерционных колебаний скорости течений, которые генерируются практически за счет данного эффекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев В.С., Колесников А.Г. О причине образования инерционных колебаний при чисто дрейфовых течениях // Изв. АН СССР. ФАО.– 1966.– т.22, № 10.– С.1104-1107.
2. Титов В.Б. О некоторых особенностях мезомасштабных движений в океане // Океанология.– 1973.– 13, вып.6.– С.963-968.
3. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане: Пер. с англ.– М.: Мир, 1981.– Ч.1.– 480 с.– Ч.2.– 365 с.
4. Блатов А.С., Булгаков Н.П., Иванов В.А. и др. Изменчивость гидрофизических полей Черного моря.– Л.: Гидрометеиздат, 1984.– 240 с.

5. *Иванов В.А., Янковский А.Е.* Длинноволновые движения в Черном море.– Киев: Наукова думка, 1992.– 110 с.
6. *Иванов В.А.* Среднемасштабная динамика вод в южных морях: современное представление.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 1996.– 264 с.
7. *Богуславский С.Г., Иванов В.А., Янковский А.Е.* Особенности инерционных течений Черного моря // Морской гидрофизический журнал.– 1996.– № 3.– С.58-68.
8. *Бельшиев А.П., Клеванцов Ю.П., Рожков В.А.* Вероятностный анализ морских течений.– Л.: Гидрометеиздат, 1983.– 263 с.
9. *Gonella J.A.* A rotary-component method for analyzing meteorological and oceanographic vector time series // Deep-Sea Res.– 1972.– 19, № 12.– P.833-846.
10. *Хоролич Н.Г.* Теоретическая модель по расчету временных спектров скоростей течений в однородном море конечной глубины / Деп. рукопись №368гм-Д84.– М.: ИЦ ВНИИГМИ-МЦД, 1984.– 38 с.
11. *Хоролич Н.Г., Фомин В.В., Хоролич В.Н.* О свойствах спектрального тензора градиентной скорости ветровых течений на шельфе // Экологическая безопасность прибрежных и шельфовых зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2006.– вып.14.– С.386-398.
12. *Хоролич Н.Г., Фомин В.В., Хоролич В.Н.* О взаимосвязи инвариантов спектральных тензоров градиентной скорости ветровых течений при реверсивном изменении наклона уровня // Системы контроля окружающей среды.– Севастополь: МГИ НАН Украины, 2006.– С.258-267.
13. *Хоролич Н.Г., Хоролич В.Н.* О подобии спектральных тензоров скорости течений на шельфе Черного моря // Экологическая безопасность прибрежных и шельфовых зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2007.– вып.15.– С.260-279.

Материал поступил в редакцию 15.11.2010 г.