

МОНИТОРИНГ ПРИБРЕЖНОЙ И ШЕЛЬФОВОЙ ЗОН МОРЕЙ

УДК 551.466.81

М.В.Билюнас, С.Ф.Доценко

Морской гидрофизический институт НАН Украины, г.Севастополь

СТАЦИОНАРНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Рассмотрена плоская задача о свободных внутренних гравитационных волнах в горизонтальном течении двухслойной жидкости с вертикальным сдвигом скорости. Глубина нижнего слоя бесконечна. В линейной постановке нахождение параметров волн сведено к решению краевой задачи относительно волнового числа волны. Для двух модельных вертикальных распределений скорости течения найдены аналитические решения задачи. Показано, что внутренние волны могут существовать только для определенных диапазонов параметров сдвигового течения и двухслойной плотностной стратификации. Исследована зависимость условий существования волн, длин волн и вертикальной структуры волнового поля от характеристик модели.

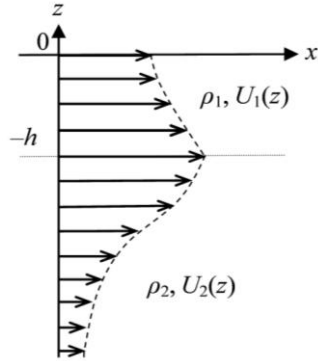
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *внутренние волны, свободные волны, течения с вертикальным сдвигом скорости, жидкость двухслойная бесконечной глубины, решения аналитические.*

Сдвиговые течения существенно влияют на динамику поверхностных и внутренних волн в Мировом океане [1]. Горизонтальная неоднородность течения вызывает рефракцию волн, вертикальные сдвиги скорости являются источником неустойчивости течения [1, 2], изменений условий генерации, горизонтальной и вертикальной структуры волновых полей [3 – 5]. Это относится как к поверхностным, так и внутренним волнам в океанах и морях. Во многих случаях в моделях задавались многослойные распределения плотности и линейные (постоянный сдвиг скорости) или кусочно-линейные распределения горизонтальной скорости течения по вертикали.

Простейшая модель (аппроксимация) вертикальной плотностной стратификации морской среды – двухслойное распределение плотности, которое в зависимости от глубины залегания границы раздела и перепада плотности между слоями позволяет моделировать сезонный или основной пикноклин. Задание в слоях горизонтальных сдвиговых течений приводит к простейшей модели стратифицированного течения с вертикальным сдвигом скорости. Именно такая модель используется ниже для анализа стационарных внутренних волн в сдвиговых течениях.

В настоящей статье для двух типов вертикальных распределений скорости течения в двухслойной жидкости бесконечной глубины найдены аналитические решения задачи и на их основе рассмотрены свойства и условия существования внутренних волн, зависимости длин внутренних волн от параметров задачи. Ранее аналогичное исследование было выполнено авторами

© М.В.Билюнас, С.Ф.Доценко, 2010



Р и с . 1 . Схема задачи.

для однородного течения с различными распределениями горизонтальной скорости течения [6].

Математическая постановка задачи. Рассматривается плоская задача о стационарных внутренних волнах в горизонтальном течении двухслойной идеальной несжимаемой жидкости с вертикальным сдвигом скорости (рис.1). Невозмущенная толщина и плотность верхнего слоя соответственно равны h и ρ_1 , плотность нижнего слоя — ρ_2 , глубина бесконечна. Вертикальное распределение горизонтальной скорости течения $U(z)$ непрерывно, но может задаваться по различным законам в верхнем и нижнем слоях, то есть

$$U = U_1(z) \quad (-h \leq z \leq 0), \quad U = U_2(z) \quad (-\infty < z \leq -h),$$

где z — вертикальная координата, отсчитываемая вверх от невозмущенного положения свободной поверхности; $U_1(-h) = U_2(-h)$; скорость течения $U_2(z)$ ограничена в нижнем слое при $z \rightarrow -\infty$.

Исследуем возможные стационарные волны в таком сдвиговом течении, предполагая их линейными. Воспользуемся приближением твердой крышки, заменив свободную поверхность горизонтальной плоскостью, которое отфильтровывает поверхностные волны без существенного искажения внутренних волн [7].

При сделанных предположениях стационарные свободные волны в сдвиговом течении описываются в области $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < z < 0$ (x — горизонтальная координата) следующей системой шести линеаризованных относительно среднего течения $(U(z), 0)$ уравнений с зависящими от вертикальной координаты z коэффициентами:

$$U_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} + \frac{dU_j}{dz} \bar{w}_j = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x} \quad (j=1,2), \quad (1)$$

$$U_j \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{u}_j(x, z), \bar{w}_j(x, z)$ — малые возмущения горизонтальной и вертикальной скоростей течения; $\bar{p}_j(x, z)$ — динамические возмущения гидростатического давления в жидкости; нижний индекс $j = 1$ относится к верхнему, $j = 2$ к нижнему слоям.

Систему уравнений (1) — (3) необходимо дополнить граничными условиями. Прежде всего, при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ должны выполняться условия

$$\bar{w}_1 = 0 \quad (z = 0), \quad \bar{w}_2(z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow -\infty). \quad (4)$$

На границе раздела слоев $z = -h$ необходимо задать условия срачивания решений в слоях. Первое (кинематическое) условие имеет вид

$$\bar{w}_1(-h) = \bar{w}_2(-h). \quad (5)$$

Оно вытекает из пары линеаризованных соотношений

$$\bar{w}_j = U_j(-h) \frac{\partial \zeta}{\partial x} (z = -h), \quad (6)$$

в которых $\zeta(x)$ – смещение границы раздела слоев от невозмущенного горизонтального положения $z = -h$. Второе условие (динамическое) означает непрерывность полного давления жидкости при пересечении границы раздела слоев $z = -h$:

$$\bar{p}_1 - \rho_1 g \zeta = \bar{p}_2 - \rho_2 g \zeta (z = -h), \quad (7)$$

где g – ускорение свободного падения.

Наконец, необходимо чтобы все разыскиваемые решения предыдущей краевой задачи были ограниченными при $x \rightarrow \pm \infty$.

Переход к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках задачи (1) – (5), (7) рассмотрим гармонические по x стационарные внутренние волны вида

$$\bar{u}_j = u_j(z) \cos kx, \quad \bar{w}_j = w_j(z) \sin kx, \quad \bar{p}_j = p_j(z) \cos kx, \quad \zeta = a \cos kx, \quad (8)$$

где k – волновое число, которое подлежит определению; u_j, w_j, p_j – неизвестные амплитудные функции; a – неизвестная константа. Подстановка (8) в уравнения и граничные условия (1) – (5), (7) и исключение u_j и p_j из полученных соотношений приводят к краевой задаче для нахождения возможных значений k и соответствующих им амплитудных функций вертикальной скорости в слоях:

$$w_1'' - [k^2 + \alpha_1(z)] w_1 = 0 \quad (-h < z < 0), \quad (9)$$

$$w_2'' - [k^2 + \alpha_2(z)] w_2 = 0 \quad (-\infty < z < -h), \quad (10)$$

$$w_1(0) = 0, \quad (11)$$

$$w_1(-h) = w_2(-h), \quad w_2'(-h) - \eta \cdot w_2(-h) - \gamma w_1'(-h) = 0, \quad (12)$$

$$w_2(z) \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow -\infty), \quad (13)$$

где штрих означает производную по переменной z ;

$$\alpha_j = \frac{U_j''(z)}{U_j(z)}, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1, \quad \varepsilon = 1 - \gamma, \quad \eta = \frac{\varepsilon g}{U_2^2(-h)} + \frac{U_2'(-h)}{U_2(-h)} - \frac{\gamma U_1'(-h)}{U_2(-h)}.$$

Предполагается, что скорость течения не изменяет своего направления, то есть для определенности считаем, что $U_j(z) > 0$ при всех $-\infty \leq z \leq 0$.

Если $w_{1,2}(z)$ найдены, то, используя уравнение (3) и соотношение (6), можно вычислить и остальные амплитудные функции, используя формулы

$$u_j = \frac{1}{k} \frac{dw_j(z)}{dz}, \quad a = -\frac{w_1(-h)}{k U_1(-h)}. \quad (14)$$

Задача (9) – (13) является основной для последующего анализа внутренних волн в двухслойном сдвиговом потоке. Она представляет собой краевую задачу на собственные значения k^2 для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Докажем, что значения μ в задаче (9) – (13) могут быть только вещественными. Введем параметр $\mu = k^2$ и произведем с уравнениями (9) и (10) следующие операции:

$$\int_{-h}^0 [(9) \cdot w_1^* - (9)^* \cdot w_1] dz = 0, \quad \int_{-\infty}^{-h} [(10) \cdot w_2^* - (10)^* \cdot w_2] dz = 0,$$

где $*$ – знак комплексного сопряжения. Далее, интегрируя по частям с учетом (11) и (13), приходим к равенствам

$$(w_1^* w_1 - w_1^* w_1) \Big|_{z=-h} + (\mu^* - \mu) \int_{-h}^0 |w_1|^2 dz = 0, \quad (15)$$

$$(w_2^* w_2 - w_2^* w_2) \Big|_{z=-h} + (\mu^* - \mu) \int_{-\infty}^{-h} |w_2|^2 dz = 0. \quad (16)$$

Исключая $w_2(-h)$ и $w_2'(-h)$ из (16) с использованием граничных условий (12), получим с учетом (15) равенство

$$(\mu^* - \mu) \left(\gamma \int_{-h}^0 |w_1|^2 dz + \int_{-\infty}^{-h} |w_2|^2 dz \right) = 0. \quad (17)$$

Из (17) следует, что $\mu^* = \mu$, то есть все собственные числа $\mu = k^2$ являются вещественными. Таким образом, для стационарных волн вида (8) значения k могут быть либо вещественными ($\mu > 0$), либо чисто мнимыми ($\mu < 0$). Чисто мнимым значениям $k = \pm i\sqrt{|\mu|}$ соответствуют неустойчивые волновые режимы (экспоненциальный рост по x амплитуд внутренних волн). Далее будем рассматривать только вещественные значения k (периодические по x волны).

Модельные вертикальные распределения скорости течения. Рассмотрим распределения горизонтальной скорости двухслойного течения, для которых решение задачи (9) – (13) выражается через элементарные функции. Такие решения, в частности, можно найти, если распределения скорости течения таковы, что $\alpha_{1,2} = \text{const}$ [6].

Пусть вертикальное распределение скорости течения

$$U_1 = U_0 \quad (-h \leq z \leq 0), \quad U_2 = U_0 e^{\delta_2(z+h)} \quad (-\infty < z \leq -h), \quad (18)$$

где $U_0 = U_1(0) > 0$, $\delta_2 = \text{const} > 0$ (рис.2, а).

Волновые возмущения течения в слоях описываются уравнениями

$$w_1'' - k^2 w_1 = 0 \quad (-h \leq z \leq 0),$$

$$w_2'' - k_2^2 w_2 = 0 \quad (-\infty < z \leq -h),$$

с краевыми условиями (11) – (13), где $k_2 = \sqrt{k^2 + \delta_2^2}$, причем во втором из условий (12) $\eta = \varepsilon g / U_0^2 + \delta_2$.

Решая задачу (19), (20), (11) – (13), найдем для амплитудных функций гидродинамических полей выражения, используя формулу (14)

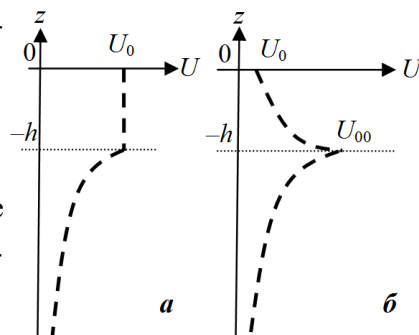


Рис. 2. Модельные распределения горизонтальной скорости течения.

$$w_1(z) = -A \frac{\text{sh}kz}{\text{sh}kh}, \quad w_2(z) = Ae^{k_2(z+h)},$$

$$u_1(z) = -A \frac{\text{ch}kz}{\text{sh}kh}, \quad u_2(z) = A \frac{k_2}{k} e^{k_2(z+h)},$$

$a = -\frac{A}{kU_0}$, где A – произвольная константа.

Волновое число k является решением трансцендентного уравнения: $\gamma \text{cth}kh + k_2 = \eta$. Его левая часть – строго монотонно возрастающая функция $k > 0$, правая – константа и поэтому это уравнение может иметь только один положительный корень k , если выполняется условие

$$U_0^2 < \frac{\varepsilon}{\gamma} gh. \quad (21)$$

Оно фактически означает, поскольку $\gamma \approx 1$ для реальных условий, что скорость течения не должна превышать скорость распространения $C \approx \sqrt{egh}$ длинных внутренних волн в двухслойной жидкости бесконечной глубины.

Для характеристики изменения скорости течения по z введем вертикальный масштаб $L = 1/\delta_2$. Он равен расстоянию между горизонтами, на котором скорость течения убывает при погружении в нижний слой в $e \approx 2,718$ раз.

Рис.3 характеризует зависимость длины внутренней волны $\lambda = 2\pi/k$ от параметров стратификации. Для $\varepsilon = 0,0005 - 0,005$ и $h = 25 - 100$ м длина внутренней волны изменяется в диапазоне 23 – 330 м. Значения λ монотонно возрастают при ослаблении устойчивости плотностной стратификации и при увеличении глубины залегания скачка плотности. При $\varepsilon \geq 0,001$ зависимость λ от толщины верхнего слоя выражена слабо.

Рис.4 позволяет рассмотреть зависимость длины внутренней волны в двухслойном течении от скорости затухания фонового течения с глубиной в

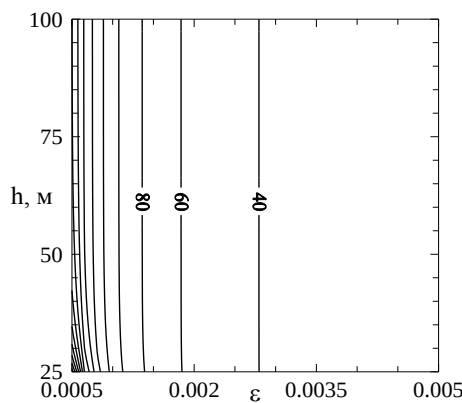


Рис. 3. Зависимость длины внутренней волны (м) в сдвиговом течении (18) от относительного перепада плотности ε и глубины залегания h скачка; $u_0 = 0,3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $L = 200$ м плотности.

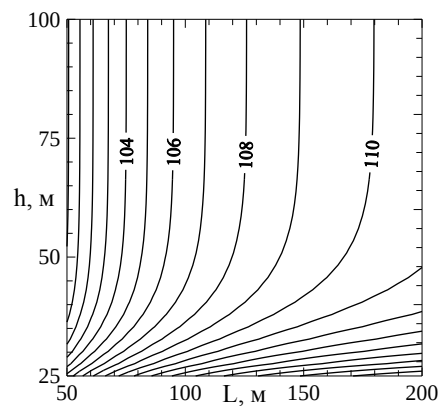


Рис. 4. Зависимость длины внутренней волны (м) от вертикального масштаба изменения скорости фонового течения в нижнем слое L и глубины залегания h скачка плотности; $\varepsilon = 10^{-3}$, $u_0 = 0,3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

нижнем слое. Для $L = 50 - 200$ м и $h = 25 - 100$ м длина внутренней волны изменяется в диапазоне $100 - 119$ м. Значения λ монотонно возрастают при увеличении L , но изменение длины волны при этом является незначительным, то есть сдвиги скорости фоновое течения в нижнем слое мало влияют на длину внутренней волны.

Анализ показал, что зависимость длины внутренней волны от скорости течения u_0 в верхнем слое ярко выражена, особенно при малом перепаде плотности жидкости на границе раздела слоев.

Рассмотрим теперь более сложное распределение скорости фоновое течения, характеризуемое экспоненциальными законами изменения $U(z)$ как в нижнем, так и в верхнем слоях жидкости (рис.2, б). Зададим

$$U_1 = U_0 e^{-\delta_1 z} \quad (-h \leq z \leq 0), \quad U_2 = U_0 e^{\delta_2(z+h)} \quad (-\infty < z \leq -h), \quad (22)$$

где $\delta_1 = h^{-1} \ln(U_{00}/U_0)$; $\delta_2 > 0$; $U_{00} = U_{1,2}(-h)$ – значение скорости течения на границе раздела слоев. В задаче (9) – (13)

$$\alpha_i(z) = \delta_i^2, \quad \eta = \frac{eg}{U_{00}^2} + \delta_2 + \gamma \delta_1.$$

Решение краевой задачи (9) – (13) в случае такого течения находится аналитически и записывается в виде:

$$w_1(z) = -A \frac{\text{sh} k_1 z}{\text{sh} k_1 h}, \quad w_2(z) = A e^{k_2(z+h)}, \quad (23)$$

$$u_1(z) = -A \frac{k_1}{k} \frac{\text{ch} k_1 z}{\text{sh} k_1 h}, \quad u_2(z) = A \frac{k_2}{k} e^{k_2(z+h)}, \quad a = -\frac{A}{k U_{00}}, \quad (24)$$

где $k_i = \sqrt{k^2 + \delta_i^2}$.

Волновое число k находится из трансцендентного уравнения

$$\gamma k_1 \text{ch} k_1 h + k_2 = \eta. \quad (25)$$

Существует единственная точка пересечения (при $k > 0$) графиков монотонно возрастающей функции, стоящей в левой части уравнения, и константы в правой части уравнения. Условие существования положительного вещественного корня уравнения (25) можно записать в форме

$$2 \ln \frac{U_{00}}{U_0} \cdot \frac{U_0^2 U_{00}^2}{U_{00}^2 - U_0^2} < \frac{\varepsilon}{\gamma} g h. \quad (26)$$

При $U_0 \rightarrow U_{00}$ условие (26) переходит в (21).

На рис.5 в плоскости переменных (U_0, U_{00}) построены найденные численно из неравенства (26) границы областей существования внутренних волн. Волны могут существо-

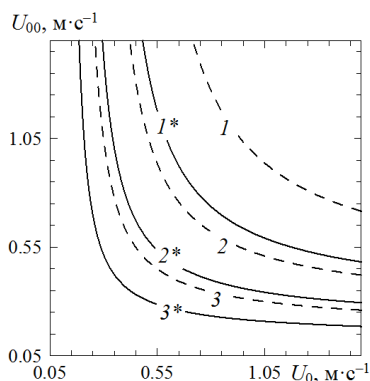


Рис. 5. Области под кривыми соответствуют значениям U_0 и U_{00} , для которых существуют внутренние волны в двухслойном сдвиговом течении: $h = 100$ м, $\varepsilon = 10^{-3}$ (1); $h = 50$ м, $\varepsilon = 10^{-3}$ (2); $h = 25$ м, $\varepsilon = 10^{-3}$ (3); $h = 100$ м, $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-4}$ (1*); $h = 50$ м, $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-4}$ (2*); $h = 25$ м, $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-4}$ (3*).

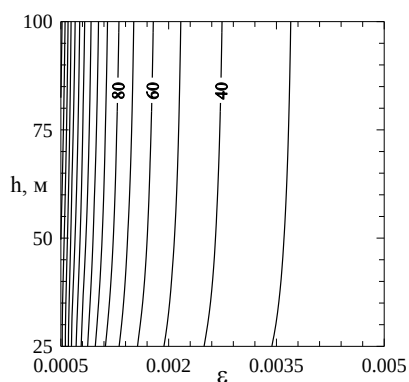


Рис. 6. Зависимость длины внутренней волны (м) в сдвиговом течении (22) от относительного перепада плотности ε и глубины залегания h границы раздела слоев; $u_0 = 0,3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $L = 200 \text{ м}$.

вать только для точек (U_0, U_{00}) , расположенных под соответствующими кривыми. Область значений параметров, для которых существуют внутренние волны, расширяется с ростом относительного перепада плотности между слоями и глубины залегания границы раздела слоев. Отметим, что условие существования внутренних волн (26) не зависит от характера изменения горизонтальной скорости течения в нижнем слое.

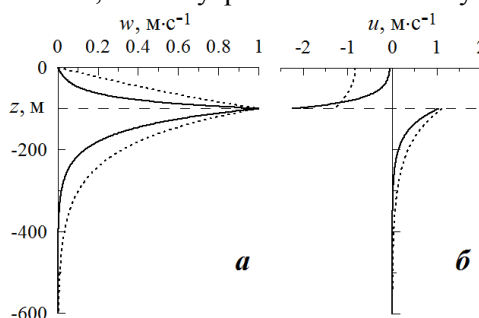
Рис. 6 характеризует зависимость длины внутренней волны $\lambda = 2\pi/k$ от параметров стратификации. Для $\varepsilon = 0,0005 - 0,005$ и $h = 25 - 100 \text{ м}$ длина внутренней волны изменяется в диапазоне $21 - 184 \text{ м}$. Значения длины волны λ монотонно возрастают при ослаблении устойчивости плотностной стратификации и увеличении глубины залегания скачка плотности, но зависимость λ от h слабо выражена.

Длина внутренней волны λ зависит от параметров сдвигового течения ниже скачка плотности (L и h). Так, для диапазонов изменения параметров сдвигового течения $50 \leq L \leq 200 \text{ м}$, $25 \leq h \leq 100 \text{ м}$, $0,1 \leq U_0 \leq 0,45 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ длина волны изменяется в интервале $80 \leq \lambda \leq 150 \text{ м}$. Сдвиги скорости фонового течения в верхнем слое приводят к изменению вертикальной структуры волновых полей в обоих слоях. Это свойство внутренних волн иллюстрирует рис. 7, распределения u и w для которого рассчитаны по формулам (23), (24).

Выводы. В общей линейной постановке выполнен анализ свободных внутренних гравитационных волн в горизонтальном течении двухслойной жидкости с вертикальным сдвигом скорости. Глубина нижнего слоя предполагается бесконечной. Нахождение параметров волн (длин и вертикальной структуры поля волновой скорости) сведено к решению краевой задачи на собственные значения (волновые числа) для системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для двух модельных распределений скорости течения по глубине найдены, с использованием приближения твердой крышки, аналитические решения задачи через элементарные функции.

Анализ полученных выражений показал, что внутренние волны могут существовать только для определен-

Рис. 7. Изменение по глубине вертикальной (а) и горизонтальной (б) проекций скорости во внутренней волне, найденных для течений со сдвигом (—) и без сдвига (---) скорости фонового течения. Значения параметров модели следующие: $U_0 = 0,01 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $U_{00} = 0,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $\varepsilon = 0,0005$, $h = 100 \text{ м}$, $L = 200 \text{ м}$.



ных диапазонов изменения параметров сдвигового течения и двухслойной плотностной стратификации. Область существования внутренних волн сужается при уменьшении перепада плотности между слоями и глубины залегания скачка плотности, а также при увеличении скорости течения у свободной поверхности и на границе раздела слоев. Длина возникающей внутренней волны убывает при усилении устойчивости плотностной стратификации, но слабо зависит от толщины верхнего слоя и вертикального масштаба изменения скорости фоновое течения ниже скачка плотности. Вертикальные сдвиги скорости фоновое течения в верхнем слое влияют на вертикальную структуру поля волновых скоростей в целом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины в рамках научного украинско-российского проекта № 05-05-10 (У) (Постановление Президиума НАН Украины от 26.05.2010 № 155).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т.2.— М.: Мир, 1981.— 365 с.
2. *Дикий Л.А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы.— Л.: Гидрометеиздат, 1976.— 108 с.
3. *Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтяр Л.Д., Суворов А.М., Тананаев А.Н., Фомин В.В., Хартиев С.М., Черкесов Л.В.* Динамика поверхностных и внутренних волн.— Киев: Наукова думка, 1988.— 192 с.
4. *Букатов А.Е., Власенко В.И., Стацук Н.М., Суворов А.М., Тананаев А.Н., Фомин В.В., Черкесов Л.В., Ярошеня Р.А.* Поверхностные и внутренние гравитационные волны в океане.— Киев: Наукова думка, 1989.— 144 с.
5. *Черкесов Л.В., Власенко В.И., Стацук Н.М., Суворов А.М., Фомин В.В.* Гидродинамика морских волн.— Киев: Наукова думка, 1992.— 162 с.
6. *Биллюнас М.В., Доценко С.Ф.* Стационарные волны в потоке однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // Морской гидрофизический журнал.— 2010.— № 4.— С.15-29.
7. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред.— М.: Наука, 1982.— 335 с.

Материал поступил в редакцию 12.11.2010 г.