

С.В.Кочергин, В.С.Кочергин

Морской гидрофизический институт НАН Украины, г.Севастополь

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ И РЕШЕНИЯ
СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДНЫХ
ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ**

Сравниваются два подхода к решению задачи идентификации мощности постоянно действующего точечного источника. Для восстановления переменной по времени мощности источника используется итерационный подход, в основе которого лежат вариационные принципы и решение сопряженной задачи. Метод сопряженных уравнений используется для оценки постоянной по времени мощности источника.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *итерационный подход, сопряженная задача, источник загрязнения, перенос пассивной примеси, диффузия.*

При решении практических задач экологической направленности на основе применения модели переноса пассивной примеси возникает необходимость идентификации входных параметров используемой модели по имеющимся данным измерений. Под входными параметрами понимаются поля скоростей, коэффициенты модели, начальные данные и мощность источников загрязнения. Данные измерений отражают объективную реальность происходящих процессов. Поэтому идентификация входных параметров модели переноса примеси на основе современных методов усвоения данных измерений является важной и актуальной задачей. В [1] произведена идентификация начальных полей исследуемых трассеров. На тестовых примерах показана работоспособность алгоритма идентификации, отмечены его интерполяционные и фильтрационные свойства, исследована зависимость скорости сходимости итерационного процесса от интервала времени, на котором решается поставленная задача и от величины коэффициента турбулентной диффузии. Увеличение этих параметров приводит к уменьшению скорости сходимости итерационного процесса. В [2] решена задача идентификации постоянного коэффициента турбулентной диффузии, а в [3] реализована процедура поиска стационарного поля скорости на поверхности Черного моря по серии спутниковых данных о поверхностной температуре. Вариационный алгоритм идентификации [4] для исследуемой модели переноса примеси показал свою работоспособность. В данной работе рассмотрим два способа идентификации мощности источника загрязнения в модели переноса пассивной примеси. Первый – метод сопряженных уравнений [5] позволяет производить прямую оценку мощности источника загрязнения в случае, когда она не меняется со временем. Второй – вариационный подход [4], в основе которого лежит минимизация квадратичного функционала качества прогноза и решение сопряженной задачи, позволяет идентифицировать переменную мощность источника.

Алгоритмы. В качестве модели переноса пассивной примеси для тестовых расчетов рассмотрим следующее двумерное уравнение:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} + \frac{\partial VC}{\partial y} = A\Delta C + Q \cdot \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

и начальными данными:

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y), \quad (3)$$

где C – концентрация примеси, U, V – заданное поле скорости, A – коэффициент турбулентной диффузии, Q – мощность источника в точке (x_0, y_0) , $\delta(x - x_0, y - y_0)$ – дельта функция Дирака, область интегрирования модели $D = [0, X] \times [0, Y]$, $D_t = D \times [0, T]$. Будем считать что $C_0 \equiv 0$, а измерения производятся на момент времени T .

Помножая (1) – (3) на C^* и интегрируя по частям получим:

$$\int_{\Omega} C d\Omega = \int_{D_t} Q \cdot \delta(x - x_0, y - y_0) C^* dD_t, \quad (4)$$

где в левой части стоит функционал, характеризующий суммарную концентрацию в некоторой области Ω , C^* – решение сопряженной задачи:

$$\begin{cases} -\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} = A\Delta C^* \\ \Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0 \\ t = T : C^* = \begin{cases} 1 & \text{в } \Omega \\ 0 & \text{вне } \Omega \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

Считая, что $Q = \text{const}$, из (4) получим оценитель для Q :

$$Q = \int_{\Omega} C d\Omega \bigg/ \int_0^T C^*(x_0, y_0, t) dt. \quad (6)$$

Аналогичная задача может быть решена на основе вариационного подхода [2] за счет минимизации функционала качества прогноза:

$$I_0 = \frac{1}{2} (C - C_{изм}, C - C_{изм})_{\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (C - C_{изм})^2 d\Omega, \quad (7)$$

где $C_{изм}$ – данные измерений на момент времени T .

Помножая (1) – (3) на множители Лагранжа λ добавляя полученное выражение к (7) получим общий вид функционала. Выписывая его вариацию и интегрируя по частям с учетом краевых условий, получим:

$$\delta I = (\delta Q \cdot \delta(x - x_0, y - y_0), \lambda)_{D_t}, \quad (8)$$

где λ – решение сопряженной задачи типа (5) с начальными данными:

$$t = T : \lambda = C_{изм} - C. \quad (9)$$

Если $Q = \text{const}$ из определения градиента функционала имеем:

$$\nabla_Q I = \int_0^T \lambda(x_0, y_0, t) dt. \quad (9)$$

Если $Q = Q(t)$, то:

$$\nabla_{Q(t)} I = \lambda(x_0, y_0, t). \quad (10)$$

Величина Q ищется итерационно по формуле:

$$Q^{n+1} = Q^n + \tau \nabla_Q I, \quad (11)$$

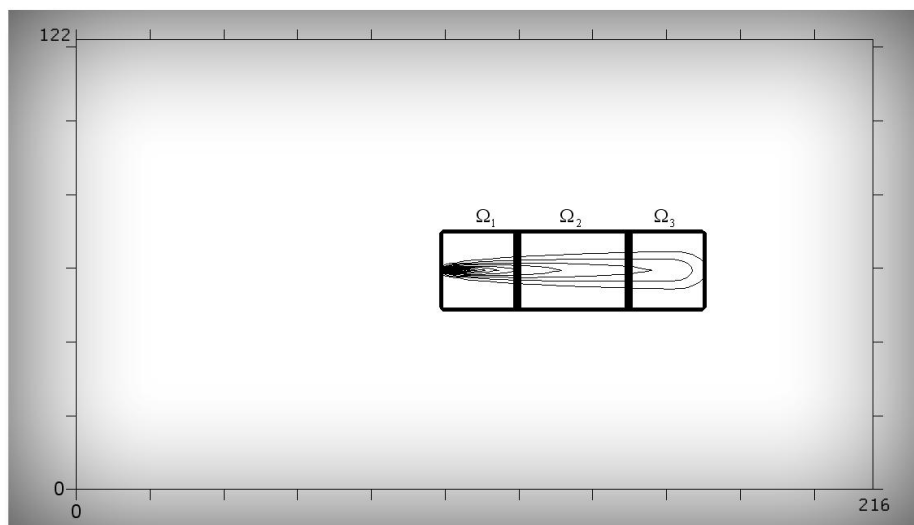
где τ – итерационный параметр.

Результаты численных экспериментов. Модель (1) – (3) интегрируется в двумерной области с $\Delta x = 5 \cdot 10^5$ см/с, $\Delta t = 10^4$ с, $A = 5 \cdot 10^5$ см²/с, $T = 40,5$ сут, $U = 10$ см/с, $V = 0$. При численной реализации модели переноса используются TVD–аппроксимации. На рис.1 представлено поле концентрации на конечный момент времени. Это поле получено в результате действия постоянного источника $Q = 1$. В качестве Ω задаем поочередно три области в D (рис.1) Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 и их объединение Ω_4 . В результате работы метода сопряженных уравнений [1] имеем результаты восстановления Q , представленные в табл.1.

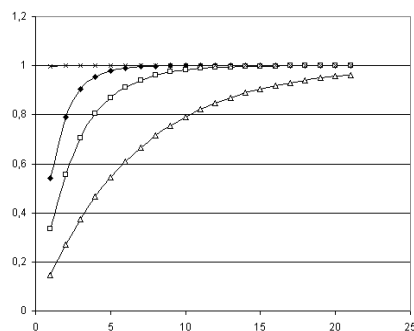
Во всех случаях имеем достаточно хорошее восстановление известной мощности источника Q . При использовании в качестве Ω области Ω_4 используется полная информация о структуре поля концентрации, что позволяет более точно восстановить Q .

Т а б л и ц а 1 . Восстановленные значений мощности источника загрязнения Q .

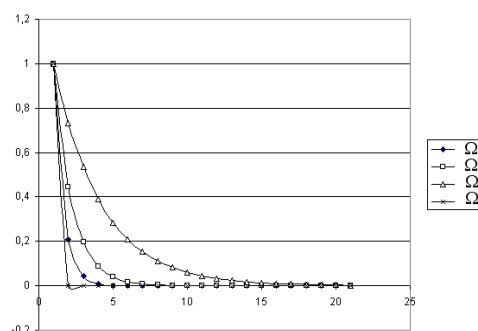
область	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
Q	1,0246	1,0023	0,9843	1,0000



Р и с . 1 . Модельное поле концентрации на конечный момент времени.



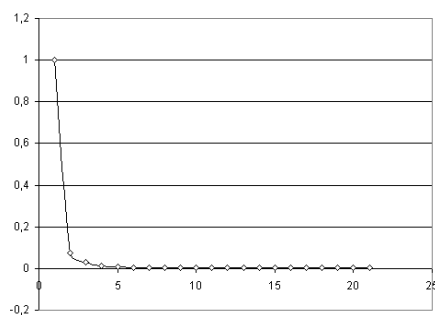
Р и с . 2 . Восстановление мощности источника в результате итераций (Q – постоянная по времени).



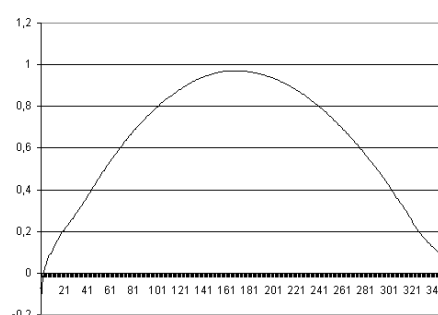
Р и с . 3 . Падение нормированного значения функционала качества прогноза (Q – постоянная по времени).

Результаты работы вариационного алгоритма идентификации Q представлены на рис.2, 3. На рис.2 показано восстановление Q в результате итераций. Видно, что восстановление Q медленнее всего происходит в случае, когда измерения проводятся на периферии пятна загрязнения (Ω_3). В случае усвоения полной информации для идентификации Q достаточно практически одной итерации. На рис.3 изображено падение нормированного значения функционала качества прогноза для всех четырех вариантов расчетов.

Из проведенных тестовых расчетов видно, что оба алгоритма дают аналогичные результаты. Они практически точно восстанавливают Q в случае, когда используется вся информация о поле концентрации (Ω_4). Когда измерения имеются не для всей области Ω_4 , первый алгоритм дает сравнительно небольшую погрешность, а второй требует большего числа итераций для восстановления истинного значения Q . Алгоритмы принципиально отличаются в случае, когда Q является функцией времени. В этом случае из (4) невозможно получить оценитель для Q . Однако, алгоритм, основанный на вариационных принципах, дает надежные результаты и в этом случае. Зададим $Q(t) = \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{349}\right)$, $n = 1, 2, \dots, 350$ и рассчитаем поле C на момент времени T при воздействии такого точечного источника. В результате числен-



Р и с . 4 . Падение нормированного значения функционала качества прогноза (Q – переменная по времени).



Р и с . 5 . Восстановленная структура $Q(t)$ в результате итераций.

ных экспериментов выяснено, что наиболее точно временная структура $Q(t)$ восстанавливается при усвоении полной информации о поле концентрации (рис.4) При этом наблюдается достаточно быстрая сходимость итерационного процесса. Для достижения минимума функционала достаточно практически одной итерации. Для случаев Ω_1 и Ω_3 сходимость итерационного процесса отсутствует, это говорит о том, что по такой информации невозможно восстановить $Q(t)$. Таким образом, для оценки $Q(t)$ необходимо иметь полную информацию о поле концентрации C .

Численные эксперименты показали надежную работу обоих алгоритмов идентификации мощности постоянного источника загрязнения. В случае, когда Q является функцией времени, идентификацию можно осуществить на основе применения вариационной процедуры. Наилучший результат получился при усвоении полной информации о поле концентрации. Рассмотренные алгоритмы могут быть применены в модели переноса пассивной примеси для идентификации мощности источников антропогенного загрязнения акватории Черного моря.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еремеев В.Н., Демьшев С.Г., Кочергин С.В., Кочергин В.С. Идентификация начальных данных в трехмерной модели переноса пассивной примеси в Черном море // Морской экологический журнал.– 2007.– 3.– С.36-46.
2. Кочергин С.В., Кочергин В.С., Вариационная идентификация параметров модели переноса пассивной примеси и планирование экспериментов // Системы контроля окружающей среды.– Севастополь, 2005.– С.186-192.
3. Кочергин С.В., Кочергин В.С., Идентификация входных параметров модели переноса пассивной примеси // Системы контроля окружающей среды.– Севастополь, 2007.– С.91-94.
4. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов.– Л.: Гидрометеиздат, 1981.– 350 с.
5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.– М.: Наука, 1982.– 320 с.

Материал поступил в редакцию 15.10.2010 г.