

А.С.Запевалов, В.В.Пустовойтенко

*Морской гидрофизический институт НАН Украины, г.Севастополь***ДВУМЕРНАЯ КОМБИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ПЛОТНОСТИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ УКЛОНОВ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Анализируются возможности и ограничения двумерной модели Грама-Шарлье для описания плотности вероятностей уклонов морской поверхности. Для анализа используются полученные в натурных условиях данные выполненных по разным методикам измерений. Отмечено, что двумерная модель Грама-Шарлье применима в ограниченной области изменения компонент уклонов. Предложена комбинированная модель, позволяющая за пределами области, где справедлива модель Грама-Шарлье, осуществить плавный переход к распределению Гаусса.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *морское волнение, уклон морской поверхности, распределение Гаусса, комбинированная модель.*

Морское волнение является слабо нелинейным процессом, распределение характеристик которого относится к классу квазигауссовых распределений [1, 2]. Для описания плотности вероятностей подобных процессов используются модели, построенные на основе рядов Грама-Шарлье [3, 4]. В настоящее время модели этого класса являются основными в приложениях, связанных с рассеянием радиоволн на морской поверхности [5, 6].

Достоинством моделей Грама-Шарлье является то обстоятельство, что их коэффициенты непосредственно рассчитываются по статистическим моментам. Однако, модели Грама-Шарлье имеют существенный недостаток – они позволяют описывать плотность вероятностей только в относительно узкой области изменения случайной величины. Для уклонов морской поверхности модель Грама-Шарлье справедлива при условии, что модуль компонент уклонов, нормированный на корень из ее дисперсии, не превышает порогового значения, равного 2,5 [4]. Обусловлено это тем, что в натурных экспериментах, как правило, определяются статистические моменты не старше четвертого порядка, соответственно при аппроксимации плотности вероятностей используются небольшое число членов ряда Грама-Шарлье. Данное обстоятельство приводит к искажениям на «крыльях» распределения [7].

Указанное ограничение приводит к тому, что в случае квазивертикального зондирования морской поверхности в миллиметровом диапазоне радиоволн при слабых ветрах модель Грама-Шарлье позволяет описывать рассеяние при углах падения, не превышающих 5 – 6° [8]. Если дистанционное зондирование осуществляется на радиоволнах сантиметрового или дециметрового диапазонов, то диапазон, в котором возможно применение модели Грама-Шарлье, становится еще более узким.

Для преодоления данного ограничения в [8] была предложена одномерная комбинированная модель, которая в области малых значений случайной величины соответствует распределению Грама-Шарлье, а при больших значениях соответствует распределению Гаусса. В настоящей работе предложена комбинированная модель для двумерного распределения уклонов.

© А.С.Запевалов, В.В.Пустовойтенко, 2010

Одномерная комбинированная модель. Пусть x случайная величина, имеющая квазигауссово распределение. Введем нормировку

$$\tilde{x} = x / \sqrt{\overline{x^2}}, \quad (1)$$

где $\overline{x^2}$ – дисперсия. Одномерное распределение Грама-Шарлье можно записать в виде

$$P_{G-C}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{x}^2\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} H_i(\tilde{x}), \quad (2)$$

где $a_i = \int_{-\infty}^{\infty} P_{G-C}(x) H_i(x) dx$ – коэффициенты ряда; H_i – полиномы Чебышева-Эрмита i -ого порядка.

Примем, что среднее значение случайной величины x равно нулю. Тогда первые 5 коэффициентов ряда Грама-Шарлье определяются соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1}{2}(\mu_2 - 1) \\ a_3 &= \frac{1}{6}\mu_3 \\ a_4 &= \frac{1}{24}(\mu_4 - 6\mu_2 + 3) \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где $\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i P(x) dx$. Первые пять полиномов Чебышева-Эрмита имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= x \\ H_2 &= x^2 - 1 \\ H_3 &= x^3 - 3x \\ H_4 &= x^4 - 6x^2 + 3 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Из условия нормировки (1) следует $\mu_2 = 1$, отсюда $a_2 = 0$; $a_3 = A/6$ и $a_4 = E/24$, где A и E соответственно асимметрия и эксцесс распределения случайной величины x .

В натуральных экспериментах статистические моменты выше четвертого порядка не определяются.

В задачах рассеяния радиоволн на морской поверхности, как правило, используется модель Грама-Шарлье в форме:

$$P_{G-C}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{x^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{x}^2\right) \left[1 + \frac{A}{6}H_3(\tilde{x}) + \frac{E}{24}H_4(\tilde{x})\right]. \quad (5)$$

Данная модель позволяет описывать одномерную плотность вероятностей компонент уклонов морской поверхности в области [4]

$$\tilde{x} \leq 2,5. \quad (6)$$

Для описания плотности вероятностей в области (6) и за ее пределами в [8] предложена комбинированная модель

$$P_C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{x}^2\right) \left\{ 1 + \left[\frac{A}{6} H_3(\tilde{x}) + \frac{E}{24} H_4(\tilde{x}) \right] F(\tilde{x}) \right\}, \quad (7)$$

где двухпараметрическая функция

$$F(\tilde{x}) = \exp\left[-\left(\frac{|\tilde{x}|}{d}\right)^n\right] \quad (8)$$

выполняет роль фильтра. Параметр d определяет ширину области, внутри которой $F(\tilde{x}) \approx 1$, параметр n определяет скорость, с которой функция $F(\tilde{x})$ стремится к нулю за пределами этой области. Выбор значений параметров d и n обсуждался в [8]. Оптимальными являются значения $d = 3$, $n = 3,5$.

Двумерная комбинированная модель. Пусть x – ось координат, ориентированная вдоль направления ветра, y – ось координат, ориентированная поперек направления ветра. Обозначим две компоненты уклонов морской поверхности, ориентированные вдоль и поперек направления ветра, как η и ξ .

Введем для них нормировку (1): $\tilde{\eta} = \eta / \sqrt{\eta^2}$ и $\tilde{\xi} = \xi / \sqrt{\xi^2}$.

Двумерное распределение Грама-Шарлье имеет вид [9]

$$P_{2D(G-C)}(\xi, \eta) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)\right]}{2\pi\sqrt{\eta^2 \xi^2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{i,j}}{i! j!} H_i(\tilde{\xi}) H_j(\tilde{\eta}), \quad (9)$$

где

$$P_{2D(G)} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)\right]}{2\pi\sqrt{\eta^2 \xi^2}} \quad (10)$$

– двумерное распределение Гаусса; первый нижний индекс коэффициента $C_{i,j}$ соответствует поперечной компоненте уклонов, второй – продольной.

Пусть известны коэффициенты $C_{i,j}$ до четвертого порядка включительно, т.е. $i + j \leq 4$. Тогда, аналогично (7), двумерную комбинированную модель плотности вероятностей уклонов морской поверхности можно представить в виде

$$P_{2D(C)}(\xi, \eta) = P_{2D(G)} \left[1 + \sum_{i=1}^4 \frac{C_{i,0}}{i!} H_i(\tilde{\xi}) F(\tilde{\xi}) + \sum_{j=1}^4 \frac{C_{0,j}}{j!} H_j(\tilde{\eta}) F(\tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{i+j \leq 4} \sum_{j=1}^{i+j \leq 4} \frac{C_{i,j}}{i! j!} H_i(\tilde{\xi}) H_j(\tilde{\eta}) F(\tilde{\xi}) F(\tilde{\eta}) \right]. \quad (11)$$

Двумерная плотность вероятностей $P_{2D}(\xi, \eta)$ уклонов морской поверхности должна удовлетворять трем условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{2D}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi P_{2D}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \bar{\xi} = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta P_{2D}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \bar{\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 P_{2D}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \overline{\xi^2} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 P_{2D}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \overline{\eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Используя свойство ортогональности полиномов Чебышева-Эрмита

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \cdot H_m(x) \cdot \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq m \\ n!, & \text{при } n = m \end{cases} \quad (14)$$

а также условия (12) – (13), можно показать [9], что

$$C_{1,0} = C_{0,1} = C_{1,1} = C_{2,0} = C_{0,2}. \quad (15)$$

Далее, учитывая (15), двумерную комбинированную модель можно привести к виду:

$$\begin{aligned} P_{2D(C)}(\xi, \eta) = P_{2D(G)}(\xi, \eta) \left\{ 1 + \left[\frac{A_{\xi}}{6} H_3(\tilde{\xi}) + \frac{E_{\xi}}{24} H_4(\tilde{\xi}) \right] F(\tilde{\xi}) + \right. \\ \left. + \left[\frac{A_{\eta}}{6} H_3(\tilde{\eta}) + \frac{E_{\eta}}{24} H_4(\tilde{\eta}) \right] F(\tilde{\eta}) + \left[\frac{C_{2,1}}{2} H_2(\tilde{\xi}) H_1(\tilde{\eta}) + \frac{C_{1,2}}{2} H_1(\tilde{\xi}) H_2(\tilde{\eta}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{C_{2,2}}{4} H_2(\tilde{\xi}) H_2(\tilde{\eta}) + \frac{C_{3,1}}{6} H_3(\tilde{\xi}) H_1(\tilde{\eta}) + \frac{C_{1,3}}{6} H_1(\tilde{\xi}) H_3(\tilde{\eta}) \right] F(\tilde{\xi}) F(\tilde{\eta}) \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

В выражении (16) для несмешанных коэффициентов (один из индексов равен нулю) сохранены стандартные обозначения асимметрии A и эксцесса E .

Определенные в натурных экспериментах численные значения коэффициентов C_{ij} представлены в таблице. В [4] уклоны морской поверхности определялись по аэрофотографиям в зоне солнечного блика. В [10, 11] уклоны измерялись с помощью двумерного лазерного уклономера. В первом случае уклономер был установлен в носовой части медленно движущегося судна, во втором случае уклономер был размещен на неподвижном основании. Несмотря на различия методик измерений, полученные оценки коэффициентов C_{ij} достаточно близки между собой.

Приведенный в таблице параметр W означает скорость ветра.

В [4] априори было принято, что распределение поперечной компоненты уклонов является симметричным относительно нулевого среднего значения. Прямые измерения показывают, что, хотя средние значения коэффициентов A_{ξ} , $C_{1,2}$, $C_{1,3}$ малы, в отдельных ситуациях наблюдаются заметные отклонения от нулевого значения [10, 11]. К асимметрии распределения поперечной компоненты уклонов приводят вариации скорости ветра, а также поверхностные течения, направленные под углом к направлению ветра.

Свойства комбинированной модели иллюстрирует рис.1. На нем представлены два сечения двумерного распределения плотности вероятностей уклонов, построенные при фиксированных значениях поперечной компоненты $\tilde{\xi} = 0$ и $\tilde{\xi} = 2$. Расчеты проводились по средним значениям коэффи-

Таблица. Коэффициенты уклонов морской поверхности третьего и четвертого порядков двумерного распределения Грама-Шарлье.

коэф- фициент	источник данных		
	работа [4]	работа [10]	работа [11]
$C_{0,3} = A_\eta$	$0,04 - 0,033W \pm 0,12$	$0,224 - 0,039W \pm 0,006$	$0,04 - 0,019W \pm 0,16$
$C_{1,2}$	0	$0,016 \pm 0,024$	$-0,010 \pm 0,12$
$C_{2,1}$	$0,01 - 0,0086W \pm 0,03$	$0,0086 \pm 0,03$	$0,0005 \pm 0,09$
$C_{3,0} = A_\xi$	0	$0,030 \pm 0,05$	$0,036 \pm 0,15$
$C_{0,4} = E_\eta$	$0,23 \pm 0,41$	$0,40 \pm 0,15$	$0,431 - 0,0369W \pm 0,12$
$C_{1,3}$	0	$0,008 \pm 0,03$	$-0,012 \pm 0,32$
$C_{2,2}$	$0,12 \pm 0,06$	$0,15 \pm 0,08$	$0,17 \pm 0,27$
$C_{3,1}$	0	$0,31 \pm 0,059$	$-0,05 \pm 0,26$
$C_{4,0} = E_\xi$	$0,40 \pm 0,23$	$0,51 \pm 0,29$	$0,28 \pm 0,29$

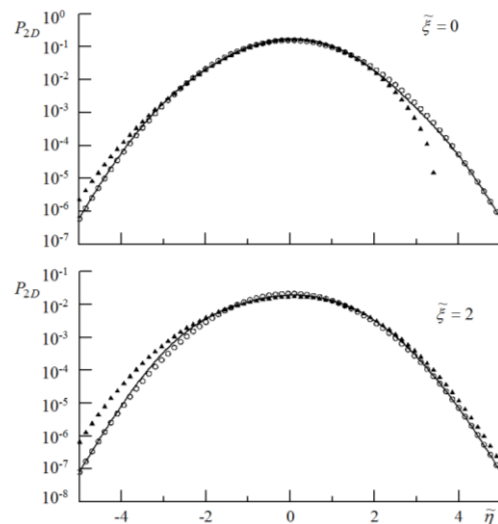
циентов $C_{i,j}$, которые представлены в [11]. Коэффициенты A_η и E_η рассчитывались для скорости ветра 10 м/с.

В случае, когда $\tilde{\xi} = 0$, при $\tilde{\eta} > 3,4$ в модели $P_{2D(G-C)}$ появляются отрицательные значения, что наглядно показывает ограничения в использовании

модели Грама-Шарлье. При данном задании коэффициентов $C_{i,j}$ отрицательные значения появляются также и в сечении $P_{2D(G-C)}$ при фиксированных значениях $\tilde{\eta}$.

Расчеты, выполненные при значениях коэффициентов $C_{i,j}$, взятых из [4], приводят к близким к результатам. В частности, отрицательные значения в сечении $P_{2D(G-C)}$ в случае, когда $\tilde{\xi} = 0$, появляются при $\tilde{\eta} > 3,7$.

Сравнение комбинированной модели и модели Лиу. Измерение уклонов морской поверхности, создаваемых короткими гравитационными, гравитационно-капиллярными и капиллярными волнами, является сложной технической задачей. Относительно небольшой объем данных оптических измерений и *in situ* измерений уклонов,



Р и с . 1 . Сечения двумерной плотности вероятностей уклонов морской поверхности при фиксированном значении поперечной компоненты: $\circ$ – распределение Гаусса, $\blacktriangle$ – распределение Грама-Шарлье, сплошная линия – комбинированная модель.

вынуждает искать альтернативные подходы к построению моделей плотности вероятностей уклонов. Одним из таких подходов является построение теоретических моделей на основе известных соотношений между характеристиками волнового поля и подгонка их параметров по данным дистанционного зондирования.

В рамках указанного подхода в [12] была построена двумерная модель плотности вероятностей уклонов морской поверхности, которую по фамилии первого автора назовем моделью Лиу и обозначим как $P_L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. В основе модели $P_L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ лежат распределения периодов волн и их амплитуд [13]. После перехода с помощью дисперсионного уравнения для гравитационных волн на глубокой воде от распределения волновых периодов к распределению длин волн, в рамках предположения, что амплитуды и длины волн независимы друг от друга, получено следующее выражение для нормированной плотности вероятностей компонент уклонов ориентированных вдоль и поперек ветра,

$$P_L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \frac{n}{2\pi(n-1)} \left[1 + \tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 \right]^{-\frac{n+2}{2}} - \frac{a_{sk}}{12\pi} \exp\left[-(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)\right] \left[(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)^{3/2} - 3(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)^{1/2} \right], \quad (17)$$

где n и a_{sk} – параметры, определяющие соответственно эксцесс и асимметрию распределения.

Явным недостатком модели Лиу по сравнению с предложенной в настоящей работе комбинированной моделью является то, что модель $P_L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ симметрична относительно двух компонент уклонов. В частности задание асимметрии и эксцесса одной компоненты автоматически приводит к таким же значениям этих параметров второй компоненты.

В области $\tilde{\xi} \leq 2,5$ и $\tilde{\eta} \leq 2,5$ модель Грама-Шарлье хорошо описывает распределение уклонов (в этой области $P_{2D(C)} = P_{2D(G-C)}$). Несмотря на утверждение авторов работы [12], что при $n = 10$ модель $P_L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ близка к модели Грама-Шарлье при значениях коэффициентов C_{ij} , полученных в [4], наблюдаются расхождения. Эти расхождения видны на рис.2, где модель $P_{2D(C)}$ рассчитывалась по значениям коэффициентов C_{ij} . Для зависящих от скорости ветра коэффициентов их значения рассчитывались при $W = 10$ м/с. Параметр a_{sk} , входящий в выражение (17) выбран равным 0,29.

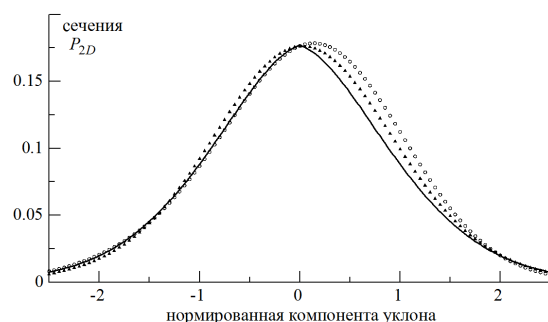


Рис. 2. Сечения двумерной плотности вероятностей уклонов морской поверхности при фиксированном значении поперечной компоненты: $\circ$ – модель $P_{2D(C)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta} = 0)$, $\blacktriangle$ – модель $P_{2D(C)}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta} = 0)$, сплошная линия – модель $P_L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, при равенстве нулю одной из переменных.

Выводы. В настоящее время основной моделью, описывающей плотность вероятностей уклонов морской поверхности в задачах рассеяния, является модель Грама-Шарлье. Ограничения в ее использовании за пределами области $\tilde{\xi} \leq 2,5$ и $\tilde{\eta} \leq 2,5$ определяют необходимость построения модели свободной от этого недостатка.

В данной работе построена двумерная комбинированная модель плотности вероятностей, которая в области $\tilde{\xi} \leq 2,5$ и $\tilde{\eta} \leq 2,5$ близка к распределению Грама-Шарлье, а за пределами указанной области близка к распределению Гаусса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Longuet-Higgins M.S. The effect of non-linearities on statistical distribution in the theory of sea waves // J. Fluid Mech.– 1963.– v.17, № 3.– P.459-480.
2. Phillips O.M. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 2. // J. Fluid Mech.– 1961.– v.11.– P.143-155.
3. Kinsman B. Wind waves; their generation and propagation on the ocean surface.– Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall Inc., 1965.– 661 p.
4. Cox C., Munk W. Measurements of the roughness of the sea surface from photographs of the sun glitter // J. Optical. Soc. America.– 1954.– v.44, № 11.– P.838-850.
5. Liu Y., Yan X.-H., Liu W.T., Hwang P.A. The probability density function of the ocean surface slopes and its effects on radar backscatter // J. Phys. Oceanogr.– 1997.– v.27.– P.782-797.
6. Chapron B., Kerbaol V., Vandemark D., Elfouhaily T. Importance of peakedness in sea slope measurements and applications // J. Geophys. Res.– 2000.– v.105, C7.– P.17195-17202.
7. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений: Пер. с англ.– М.: Наука, 1966.– 587 с.
8. Запелов А.С., Пустовойтенко В.В. Моделирование плотности вероятностей уклонов морской поверхности в задачах рассеяния радиоволн // Изв. ВУЗов. Радиофизика.– 2010.– т.53, № 2.– С.110-121.
9. Cox C., Munk W. Slopes of the sea-surface deduced from photographs of sun glitter // Bulletin of the Scripps Institution of Oceanography.– 1956.– v.6, № 9.– P.401-488.
10. Hughes B.A., Grant H.L., Chappell R.W.A. A fast response surface-wave slope meter and measured wind-wave components // Deep-Sea Res.– 1977.– v.24, № 12.– P.1211-1223.
11. Христофоров Г.Н., Запелов А.С., Бабий М.В. Статистические характеристики уклонов морской поверхности при разных скоростях ветра // Океанология.– 1992.– т.32, вып.3.– С.452-459.
12. Liu Y., Yan X.-H., Liu W.T., Hwang P.A. The probability density function of the ocean surface slopes and its effects on radar backscatter // J. Phys. Oceanogr.– 1997.– v.27.– P.782-797.
13. Longuet-Higgins M.S. On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves // J. Geophys. Res.– 1975.– v.80.– P.2688-2694.

Материал поступил в редакцию 19.10.2010 г.