

В.Г.Полников

*Институт физики атмосферы им. А.М.Обухова РАН, г.Москва***ФОРМА ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА ВЕТРОВЫХ ВОЛН
И ОПТИМАЛЬНЫЙ СПОСОБ ЕГО РАСЧЕТА**

На основании расчета большого числа частотных спектров ветровых волн, выполненных различными методами и для различных ветро-волновых условий их образования, сделаны следующие заключения: 1) оптимальным методом расчета одномерных спектров волн является метод авторегрессии [1 – 3]; 2) частотные спектры ветровых волн всегда имеют регулярное распределение достоверных локальных максимумов в области частот, превышающих частоту максимума спектра и, как правило, расположенных на частотах, близких к кратным частотам главного пика; причина появления отмеченных локальных максимумов обусловлена нелинейной природой гравитационных волн [4, 5]; 3) среднеквадратичные наклоны спектров в области высоких частот не проявляют строгой принадлежности к закону «– 4» или «– 5» и могут существенно варьировать в силу целого ряда физических причин [6].

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *ветровые волны, спектр, уклоны спектра, кратные гармоники, нелинейность.*

Форма эмпирических частотных спектров $S(\omega)$ ветровых волн изучается с момента появления спектрального анализа, т.е. с конца 50-х гг. прошлого века [7, 8]. По причине сложности природы эволюции ветрового волнения и отсутствия возможности его аналитического описания, для идентификации спектров ветровых волн применяется их аналитическая параметризация. С начала 60-х гг. XX в. широко признанными являются представления о спадании хвоста спектра по закону Филлипса [8]

$$S(\omega) = \alpha_p g^2 \omega^{-5}, \quad (1)$$

справедливого в высокочастотном диапазоне, заданным соотношением

$$\omega > (2 - 3)\omega_p, \quad (2)$$

(т.н. «хвост» спектра) и основанного на этом представлении о спектре Пирсона-Московица (ПМ) [9] для полностью развитого волнения

$$S_{PM}(\omega) = \alpha_p g^2 \omega^{-5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_{PM}}{\omega} \right)^4 \right]. \quad (3)$$

Здесь α_p – параметр Филлипса, регулирующий общую интенсивность спектра, ω_p – величина частоты пика спектра, которая для спектра ПМ определяется силой ветра U_{10} на стандартном горизонте 10 м по эмпирической формуле

$$\omega_{PM} = 0,9 g / U_{10}. \quad (4)$$

Принципиальными достоинствами параметризации (5) являются: аналитическая интегрируемость по ω функции $S(\omega)$, четкое ее соответствие острому максимуму реальных спектров и согласованность со спектром Филлипса (1). С тех пор огромное число работ посвящено установлению

© В.Г.Полников, 2010

диапазонов изменчивости параметров α_p и ω_{PM} , а также уточнению параметризаций (1) и (3) с целью расширения области их применимости.

Так, в знаменитом эксперименте JONSWAP [10] было предложено обобщение формы спектра (3) на случай развивающегося волнения; при этом был выявлен широкий диапазон изменчивости величины α_p . Все эти результаты можно найти как в первоисточниках, так и в обзорных главах многочисленных монографий (например, [7, 11, 12]). Для целей данной работы существенно лишь, что все дополнительные параметризации не касались формы хвоста спектра и закона его спадания.

Существенные уточнения в этом направлении были сделаны в 1972 г. в работе Тобы [13], который установил, что на стадии развития волн, в лотках регулярно наблюдается форма хвоста спектра вида

$$S(\omega) = \alpha_T g u_* \omega^{-4} \quad (\omega > \omega_p). \quad (5)$$

Позднее такой результат стали наблюдать и в природных условиях [14, 15]. Используемый в (5) безразмерный коэффициент α_T получил название параметра Тобы; а величина $u_* = C_d^{1/2} U_{10}$ есть скорость трения, линейно связанная со скоростью на стандартном горизонте.

Дальнейший прогресс в исследовании формы спектра ветровых волн привел к появлению большого ряда других параметризаций $S(\omega)$ [7, 12], не изменяющих, однако, представления для формы хвоста спектра вида (1) или (5), которые далее мы будем считать традиционными.

Несколько в стороне от указанных, теперь уже традиционных, представлений о форме хвоста спектра стоят работы [16 – 18], в которых показано существование регулярных локальных максимумов в хвостовой части спектра, расположенных в областях частот, кратных частоте пика. Все авторы однозначно признают, что причина появления локальных максимумов обусловлена нелинейной природой ветровых волн. При этом, что существенно, основное обоснование указанных утверждений проводится, как правило, на основе теоретической работы Стокса [4] или ее развития (например, [19]). Однако, согласно этим теоретическим результатам, интенсивность второй гармоники I_2 должна быть второго порядка по степени крутизны поля волн ε , т.е.

$$I_2 \equiv S(2\omega_p) \approx \varepsilon^2 S(\omega_p) \equiv \varepsilon^2 I_1, \quad (6)$$

где $\varepsilon = ak_p \ll 1$ (a – средняя амплитуда волн, k_p – волновое число пика спектра). Поскольку типичное значение ε порядка 0,1 [7, 11], то эмпирическая регистрация столь малой интенсивности I_2 представляется весьма проблематичной (по причине недостаточной для этой цели точности определения самого уровня спектра). Тем не менее, указанные максимумы наблюдаются, и наиболее отчетливо это видно в [18], в которой построение спектров волн проводилось методом авторегрессии [1 – 3].

В специальной работе автора [5] показано, что, на самом деле, теория Стокса должна быть существенно модифицирована, путем выполнения суммирования бесконечного ряда секулярных слагаемых в рядах теории возмущений (т.н. перенормировка интенсивности основной гармоники). В таком случае, для предельно узкого (дельта-образного) по частотам спектра

линейной части поля, теоретическая оценка интенсивностей высших гармоник приводит к соотношениям [5]

$$I_2 = \frac{1}{8} I_1 \approx 0.1 I_1, \quad I_3 = \frac{2}{135} I_1 \approx 0.015 I_1. \quad (7)$$

Нам представляется, что именно такого рода оценки подтверждают возможность эмпирического наблюдения кратных гармоник.

Данная работа посвящена эмпирическому доказательству того, что указанные локальные максимумы неизменно и регулярно проявляются в одномерных частотных спектрах ветровых волн. При этом существенным условием их наблюдения является использование метода авторегрессионной оценки спектра волн по методике работы [3], которая и рекомендуется нами в качестве наиболее эффективной среди известных стандартных методик (например, в рамках математических средств пакета программ *MATLAB*).

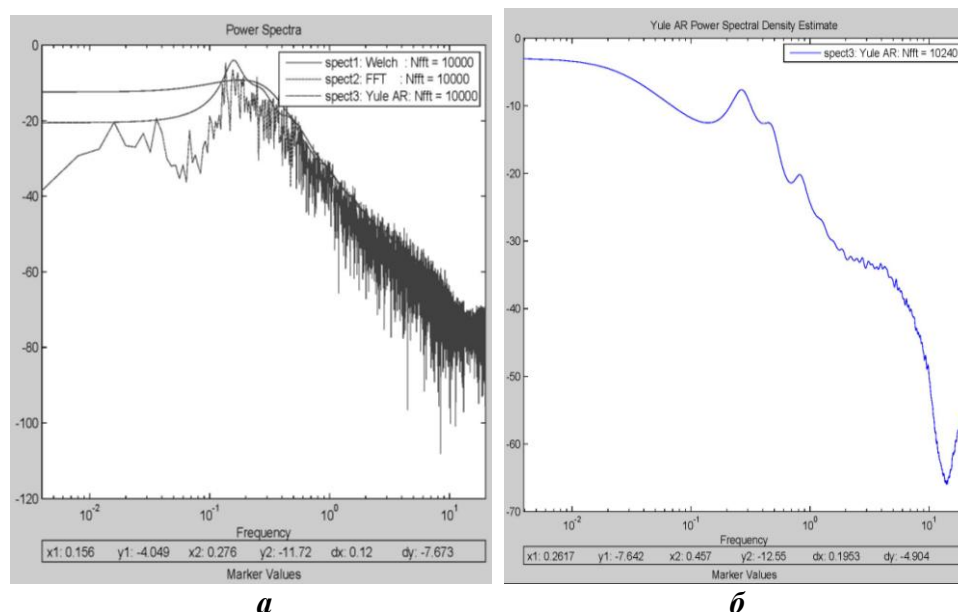
Для достижения указанной цели нами используются стандартные программы спектрального анализа программного пакета *MATLAB* и база данных волнограмм, полученных в ходе эксперимента «Кацивели-2009», выполненного по программе Российско-Украинского проекта № 09-05-90430-УКР_ф_а. С целью полноты анализа, параллельно выполняется оценка среднеквадратичных уклонов для хвоста спектра, и делаются заключения о степени их принадлежности законам (1) или (5).

Выбор эффективного метода расчета спектра. В настоящее время нет проблем с выбором метода расчета спектров, что обусловлено широким разнообразием стандартных программ. В наших расчетах мы пользовались пакетом программ *MATLAB*, приложение *sptool*. В процессе обработки данных упомянутого совместного эксперимента, была выполнена большая серия (более 1000) расчетов спектров $S(\omega)$ методом быстрого преобразования Фурье (*FFT*). Затем, специально для данной работы, спектры тех же рядов были рассчитаны методом авторегрессии (АР) (и частично – методом Велша (*Welsh*) с определенным окном сглаживания). Сопоставление полученных оценок спектров и послужили основой для дальнейшего анализа.

Пример визуального сопоставительного оценивания качества полученных оценок частотных спектров ветровых волн $S(\omega)$ приведен на рис.1, где показаны типичные результаты спектральной обработки данных конкретной волнограммы, записанной струнным волнографом с дискретностью 40 Гц на отрезок времени 12:00 – 12:20 от 14 сентября 2009 г. (рис.1, а) и на период времени 00:00 от 14 сентября 2009 г. (рис.1, б).

Как видно из рис.1, не смотря на определенную близость оценок интенсивности спектра и ее распределения по частотам, АР-оценка существенно выделяется в лучшую сторону. Не останавливаясь на количественных характеристиках формы спектра, стоящих в стороне от нашей задачи, отметим, что принципиальные положительные отличия АР-оценки спектра заключаются в следующем: 1) высокая степень гладкости кривой $S(\omega)$; 2) высокая степень разрешения по частоте; 3) наличие регулярного расположения особенностей на хвостовой части спектра (локальных «полок» или максимумов). Далее эти особенности будут называться тонкой структурой спектра.

Следует сразу же отметить, что упомянутая тонкая структура спектра действительно характерна для всех без исключения АР-оценок спектров, выпол-



Р и с . 1 . Примеры оценок спектра ветровых волн $S(f)$, выполненных методом Велша (слабовыраженный максимум), методом FFT (изрезанная кривая) и методом авторегрессии (гладкая кривая с острым максимумом) (а). Частота f задана в герцах, а интенсивность спектра $S(f)$ в децибелах. Значения маркера x_1 , x_2 означают частоты основного максимума и следующей за ним локальной «полки» или максимума. Пример (б) приведен для более явной демонстрации свойств АР-оценки на примере иного ряда (см. текст).

ненных в данной работе. Она никак не связана с величиной и положением основного максимума спектра, но может иметь ту или иную степень сложности в зависимости от наличия или отсутствия пиков волн зыби, дополняющих пик основной гармоники ветровых компонент. В виду ограниченности места здесь не приводится демонстрация всего разнообразия полученных спектров, полагая, что читатель имеет достаточное общее представление о таких спектрах (например, [7]).

Первые два из упомянутых выше отличий, достаточно хорошо известные из специальной литературы [1, 2], прекрасно различимы визуально; поэтому они не нуждаются в пояснениях. Последнее же отличие обусловлено как математикой получения АР-оценок спектров [1 – 3] (конкретно – отсутствием необходимости в выполнении Фурье-преобразований), так меньшими доверительными интервалами, следующими из правил выбора порядка АР-модели по виду корреляционной функции для анализируемого гидрофизического процесса (см. ниже).

Действительно, традиционные методы получения оценки спектральной плотности $S(\omega)$ (методы: *Welsh*, *FFT* и им подобные) требуют выполнения Фурье-преобразования случайного ряда, что в численном исполнении сопровождается значительной математической ошибкой (пример – оценка *FFT* на рис.1). Для уменьшения этой ошибки требуются известные процедуры сглаживания [20]. Однако, не смотря на то, что такая процедура по-

вышает точность оценки, она, во-первых, не имеет единственности, и, во-вторых, приводит к снижению частотного разрешения по спектру, что отрицательно сказывается на достоверности оценки в целом (пример – оценка по методу Велша на рис.1).

Альтернативный, авторегрессионный (АР) метод основан на построении статистической, авторегрессионной модели случайного ряда $z(t_i) \equiv z_i$, которая переводит его в ряд белого шума a_i по формуле

$$a_i = \sum_{j=0}^P b_j z_{i-j}, \quad (8)$$

что эквивалентно представлению

$$z_i = \sum_{j=1}^P \alpha_j z_{i-j} + a_i, \quad (9)$$

которое и называется авторегрессионной моделью ряда z_i . Из теории следует [1, 2], что как только (при априорно заданном порядке модели P) коэффициенты АР α_j получены, форма спектра определяется аналитической формулой

$$S(\omega) = 2\sigma_a^2 \Delta t \left| 1 + \sum_{j=1}^P \alpha_j \exp(-i\omega j \Delta t) \right|^{-2}, \quad (10)$$

где σ_a^2 – дисперсия белого шума, оцениваемая по определенной процедуре совместно с коэффициентами АР. Для этой цели достаточно знать только P начальных (самых значимых) отсчетов корреляционной функции исследуемого процесса. В силу аналитического представления спектра и образующей ролью знаменателя в выражении (10) достигаются все перечисленные выше преимущества метода АР-оценки спектра.

В свою очередь, при заданном P , коэффициенты АР находятся путем решения простейшей системы из P линейных уравнений вида

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ K_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{P-1} \\ K_1 & K_0 & \dots & K_{P-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{P-1} & \dots & K_1 & K_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_P \end{pmatrix}, \quad (11)$$

носящей название системы уравнений Юла-Уокера [1, 2], где K_i ($i = 0, 1, \dots, P$) – значения элементов корреляционной функции исходного ряда z_i . Таким образом, проблема получения оценки спектра заключается лишь в определении порядка АР-модели P вида (9).

На практике высокая степень достоверности оценки (10) достигается за счет оптимального выбора порядка АР-модели P . В специальной работе автора [3] показано, что этот выбор определяется поведением корреляционной функции. В частности, там установлено, что для волновых процессов оптимальная величина P соответствует периоду изменчивости корреляционной функции. Там же указано, что 95 %-ные доверительные интервалы для оценки (10), для представления спектра в логарифмических координатах,

можно определять по формуле

$$D_{AR}(\nu) = [\lg(1 - 2\sqrt{2/\nu}); \lg(1 + 2\sqrt{2/\nu})], \quad (12)$$

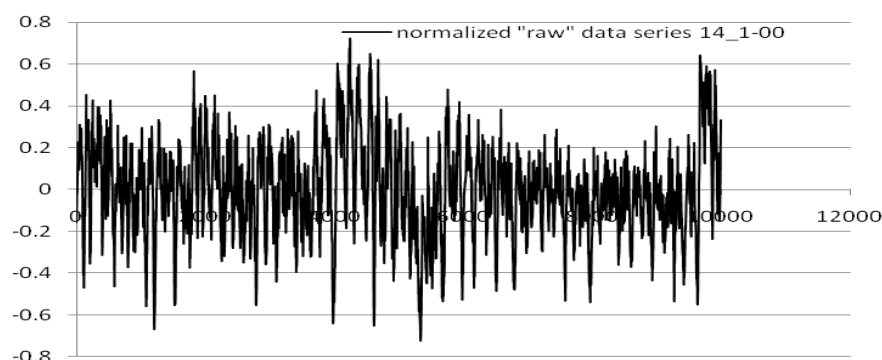
где $\nu = N/P$ – число степеней свободы, N – длина анализируемого ряда. В силу малости используемых отсчетов корреляционной функции, число степеней свободы в АР-методе, как правило, в 2 – 3 раза выше, чем в традиционных подходах к оценке спектра. Особенно преимущество доверительных интервалов для АР-метода оценки спектра проявляется при малых ν ($\nu < 50$), т.е. когда рассматриваются короткие ряды [3].

Во всех остальных аспектах (положение главного максимума, среднеквадратичный закон спада хвоста спектра, диапазон изменчивости спектральной интенсивности), изображенные на рис.1 спектры (как и следует ожидать для хорошо проработанных методик) полностью идентичны.

Для целей нашей работы существенно отметить, что перечисленные выше преимущества АР-метода выявляют новые структурные особенности спектров ветровых волн, и эти особенности однозначно проявляются для всей совокупности выполненных нами оценок спектров. Именно на этом основании нам представляется возможным сделать следующее утверждение: АР-метод расчета одномерных спектров любых случайных рядов (и для ветрового волнения, в частности) является оптимальным среди всех имеющихся методов. Поэтому нам представляется, что именно АР-метод должен быть рекомендован в качестве основного для задач расчетов одномерных спектров.

Анализ особенностей формы спектров ветровых волн. Итак, как было отмечено выше, важнейшей принципиальной особенностью спектров ветровых волн является присутствие в них регулярных локальных максимумов в хвостовой части спектра, иными словами, наличие тонкой структуры формы спектра. Физическая причина существования таких максимумов хорошо известна: она заключается в нелинейной природе волновых процессов [4, 5, 19]. Как было указано во введении, нелинейная теория волн на воде, выполненная с учетом перенормировки интенсивности основных гармоник [5], предсказывает вполне измеримые величины максимумов вынужденных кратных гармоник волн. И действительно, на примере типового спектра, изображенного на рис.1, элементарные визуальные оценки показывают, что последовательное соотношение интенсивностей локальных максимумов имеет порядок 1:10, что очень близко к (идеализированным) оценкам (7).

Здесь нет необходимости углубляться в теоретические рассуждения. Важнее, во-первых, признать, что форма хвоста спектра ветровых волн весьма далека как от традиционных теоретических описаний ее формирования за счет четырех-волновых нелинейных процессов [21 – 23], так и от формального следования законам спада типа (1) и (5). И это понятно, если принять во внимание разницу между крупными временными масштабами формирования хвоста спектра, определяемыми за счет медленных четырех-волновых нелинейных переносов, и значительно более мелкими масштабами, соответствующими более быстрому (в ε^{-2} раз) трех-волновым процессам, реально формирующим наблюдаемый спектр [5, 21]. К этому можно добавить, что ожидаемые «медленные» спектры могут быть получены из наблюдаемых лишь путем определенной «фильтрации», математичес-



Р и с . 2 . Участок исходной записи волнения.

кая процедура выполнения которой пока не совсем ясна.

Во-вторых, интересно объяснить причину хронического «незамечания» (недооценивания), казалось бы, столь теоретически ожидаемого эффекта присутствия «быстроустанавливающихся» локальных максимумов на хвосте спектра.

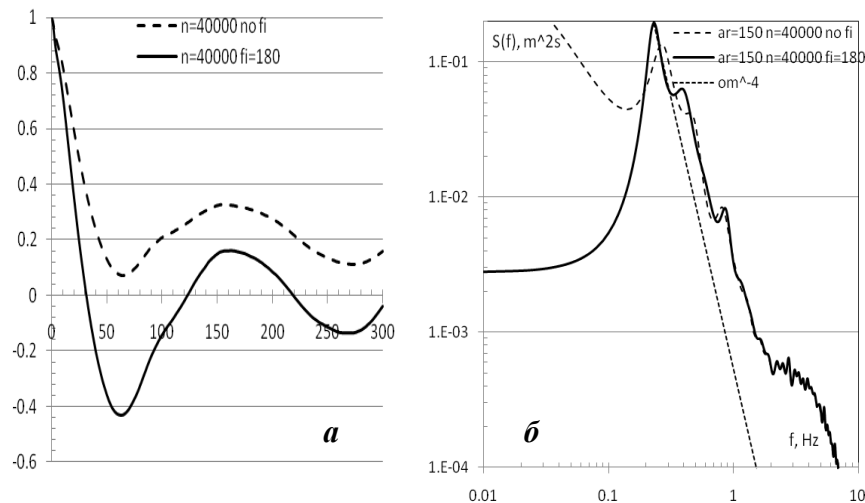
Одна из причин, как теперь ясно, кроется в малой популярности (а, может быть, даже «недоверии») АР-метода оценки спектра. По итогам анализа приведенных выше примеров, эта причина может считаться снятой, если более смело и аккуратно применять АР-оценки одномерных спектров (детали в [3]).

Вторая из возможных причин природного (или естественного) «подавления» локальных максимумов в спектре волн заключается в присутствии низкочастотных колебаний в записях волнограмм, обусловленных самыми различными процессами в море, обсуждение которых здесь не принципиально. Действительно, приведем сжатую эпюру «сырой» волнограммы на период 00:00 14 сентября 2009 г., зашумленную низкочастотными наводками (рис.2).

Из рис.2 невооруженным глазом видно существование низкочастотных колебаний, проявляющееся в вариациях «среднего уровня» волнограммы. Корреляционные функции и спектры АР, построенные для указанного «сырого» ряда и ряда, фильтрованного стандартным $\cos$ -фильтром [20] длиной f_i , представлены на рис.3. Очевидно, что низкочастотная фильтрация ряда повышает степень разрешения интенсивности локальных максимумов в оценке спектра $S(\omega)$. На гладких по форме АР-спектрах такой эффект особенно заметен. Для убедительности можно привести такое же сопоставление оценок спектров для упоминавшегося выше ряда на момент времени 12:00 от 14 сентября 2009 г. (рис.4).

На основании сказанного ясно, что для нефiltroванных рядов наличие локальных максимумов может существенным образом камуфлироваться большой интенсивностью низкочастотных составляющих в исходных данных. В традиционных оценках эффект «очищения» локальных максимумов за счет НЧ-фильтрации (в силу их сглаженности), как правило, мал, поэтому они, как правило, и не принимаются во внимание.

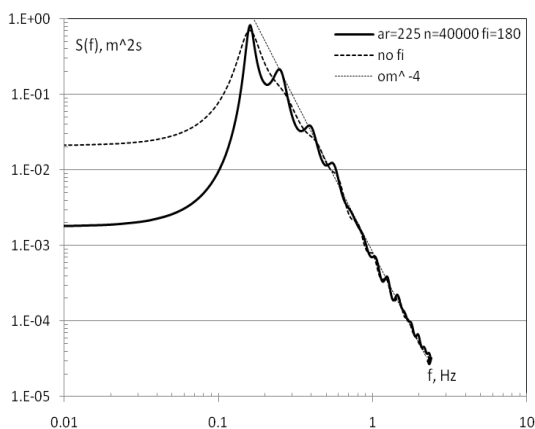
И, наконец, третья причина «потери» локальных максимумов может заключаться в использовании слишком длинных рядов. Действительно, если для оценки спектра использовать запись протяженностью, превышающей ха-



Р и с . 3. Зависимость оценки корреляционной функции (а) и спектра (б) от наличия низкочастотной фильтрации. n – длина ряда, fi – длина cos-фильтра; пунктир – регрессия $S(f) \propto f^{-4}$.

ракторный масштаб квазистационарности ветровых волн (20 – 30 мин), то, за счет естественного эволюционного сдвига частоты максимума спектра, в полученной оценке $S(\omega)$ происходит «размазывание» его положения по полосе частот, что и приводит к недостоверному выглаживанию формы хвоста спектра. По-видимому, этот эффект вполне понятен на словах и не нуждается в специальной визуализации.

В заключение раздела скажем несколько слов о законах спада спектров. Уже на приведенных выше рисунках можно заметить, что регрессионная линия $S(\omega) \propto \omega^{-4}$ спадает, как правило, быстрее, чем интенсивность самого спектра, что далеко не соответствует соотношениям (1) или (5). Во многих случаях такое поведение хвоста спектра обусловлено наличием смешанного волнения. Кроме того, как уже установлено, существенное влияние на уклон спектра оказывают и регулярные локальные максимумы, что заставляет говорить лишь о «среднеквадратичных» законах спада спектров.



Р и с . 4. Пример «усиления» локальных максимумов в спектре ветровых волн, появляющегося после НЧ-фильтрации исходных данных. Мелкий пунктир – регрессия $S(f) \propto f^{-4}$.

При этом, как уже отмечалось, идеализированные формы (1) и (5) справедливы только на больших масштабах времени, когда все механизмы эволюции, включая и четырех-волновые нелинейные взаимодействия, успевают полностью проявить-

ся. Такому положению соответствуют масштабы порядка тысяч периодов доминантной волны (или основной гармоники спектра) [22], когда само поле волн уже теряет стационарность описания. Таким образом, в силу естественной (в том числе и нелинейной природы) нестационарности спектра происходит закономерное смещение основного максимума, влекущее за собой и смещение хвоста спектра как целого. В таком случае, само понятие «уклона» спектра приобретает дополнительную неопределенность.

Именно все приведенные соображения и дают основания для объяснения довольно больших разбросов показателей частотного спада спектров ветровых волн (от -3 до -7 и более), наблюдаемые в специализированных экспериментах [6].

Заключение. Итог выполненной работы заключается в следующем.

Во-первых, на примере свежих данных эксперимента «Кацивели-2009» явно показано, что среди известных методов одномерного спектрального анализа наиболее информативной является оценка спектра методом авторегрессии [1 – 3].

Во-вторых, впервые надежно установлено, что в хвостовой части спектра ветровых волн всегда имеют место достоверные локальные максимумы, расположенные в районе частот, кратных частоте пика спектра. Иными словами, имеет место тонкая структура формы спектра. Теоретической основой для интерпретации полученных наблюдений может служить работа [5].

Указан ряд причин, по которым упомянутые локальные максимумы либо не проявлялись, либо не принимались во внимание ранее. На этой основе сформулированы рекомендации по выполнению оценок спектров ветровых волн, а именно: использование АР-метода, фильтрация низких частот, ограничение масштабами стационарности.

В-третьих, полученный результат существенно меняет трактовку вопроса о механизмах формирования и о законе спада хвоста спектра. Следуя [5], можно утверждать, что на масштабах квазистационарности ветровых волн (до сотен главных периодов) форма спектра определяется «быстрыми» трехволновыми взаимодействиями, обеспечивающими формирование на хвосте спектра набора кратных гармоник такой интенсивности, которая доступна для наблюдений при типичной точности инструментальных измерений. Теоретические модели [21 – 23], предсказывающие возможность существования гладких, степенных законов спада спектров вида (1) или (5), применимы на масштабах, превышающих масштабы стационарности ветровых волн (тысячи доминантных периодов), когда использование частотного спектрального анализа теряет основания, что и подтверждается наличием тонкой структуры формы спектра.

В свете сказанного, проблема изучения и анализа закономерностей формирования и определения степенного спада хвоста спектра представляется пока еще весьма далекой от завершения и требующей дополнительного и специализированного изучения. Для этой цели потребуются дальнейшие расчеты спектров для сильно различающихся ветро-волновых условий и, возможно, даже новые эксперименты, выполненные с более высоким уровнем контроля всех параметров ветро-волновой обстановки.

В заключение автор выражает благодарность Кузнецову Ю.С. (ИО РАН, Москва) и Дулову В.А. (МГИ НАН Украины) за любезно предоставленные данные натурных измерения волнения, выполненные в совместном эксперименте «Кацивели-2009», проводившимся в рамках российско-украинских проектов Российского фонда фундаментальных исследований № 09-05-90430-Укр_ф_а и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины № Ф28/435.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козубская Г.И., Коняев К.В. Адаптивный спектральный анализ случайных процессов и полей // Изв. АН СССР. ФАО.– 1977.– 13, № 1.– С.61-66.
2. Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального анализа. Обзор // ТИЭЭР.– 1981.– 69, № 11.– С.5-51.
3. Полников В.Г. Особенности адаптивного спектрального анализа гидрофизических процессов // Тр. 5-го Всесоюзного совещания по статистической метеорологии.– Казань, 1985.– С.146-151.
4. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Trans. Cambr. Phys. Soc.– 1947.– 8.– P.441 -455.
5. Полников В.Г. Метод перенормировки в теории возмущений для случайного поля нелинейных поверхностных волн // Морской гидрофизический журнал.– 1988.– № 3.– С.34-41.
6. Rodrigues G., Soares C.G. Uncertainty in the estimation of the slope of the high frequency tail of wave spectra// Appl. Ocean Res.– 1999.– v.21.– P.207-213.
7. Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс.– Л.: Гидрометеиздат, 1978.– 286 с.
8. Phillips O.M. The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves // Ibid.– 1958.– 4.– P.231-245.
9. Pierson W.J., Moskowitz L. A proposed spectrum for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A.Kitaigorodskii // J. Geophys. Res.– 1964.– 69, № 24.– P.5181-5190.
10. Hasselmann K., Barnett T.P., Bouws E., et al. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) // Dtsch. Hydrogr. Z.– 1973.– 8, № 12.– P.95.
11. Ефимов В.В., Полников В.Г. Численное моделирование ветрового волнения.– Киев: Наукова думка, 1991.– 240 с.
12. Komen, G., Cavaleri L., Donelan M., et al Dynamics and modelling of ocean waves.– Cambridge University Press, 1994.– 532 p.
13. Toba Y. Local balance in the air-sea boundary processes. 1. On the growth process of wind waves //J. Oceanogr. Soc. Japan.– 1972.– 28, № 3.– P.109-121.
14. Donelan M.A., Hamilton J., Hui W.H. Directional spectra of wind generated waves // Phil. Trans. R. Soc. London.– 1985.– A315.– P.509-562.
15. Phillips O.M. Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves // J. Fluid Mech.– 1985.– 156.– P.505-631.
16. Лейбо А.Б., Лейкин И.А. Об экспериментальном исследовании нелинейных взаимодействий в спектре ветровых волн // Докл. АН СССР.– 1981.– 258, № 5.– С.1212-1215.

17. Лейкин И.А., Показеев К.В., Розенберг А.Д. Об эффекте превышения в спектре развивающихся ветровых волн // Докл. АН СССР.– 1983.– 270, № 6.– С.1474-1478.
18. Полников В.Г., Федотов А.Б. Эффекты нелинейности в спектре поверхностных гравитационных волн // Изв. АН СССР. ФАО.– 1983.– 19, № 3.– С.330-332.
19. Weber B.L., Barric D.E. On the nonlinear theory for gravity waves on the ocean's surface. 1. Derivations // J. Phys. Oceanogr.– 1977.– 7, № 1.– P.3-10.
20. Бендат Д., Пирсон Л. Измерение и анализ случайных процессов.– М.: Мир, 1974.– 436 с.
21. Захаров В.Е., Филоненко Н.Н. Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости // Докл. АН СССР.– 1966.– т.170, № 6.– С.1292-1295.
22. Захаров В.Е., Заславский М.М. Форма спектра энергонесущих компонент водной поверхности в слаботурбулентной теории ветровых волн // Изв. АН СССР. ФАО.– 1983.– 19, № 3.– С.282-291.
23. Kitaigorodskii S.A. On the theory of the equilibrium range in the spectrum of wind-generated gravity waves // J. Phys. Oceanogr.– 1983.– 13, № 5.– P. 816-827.

Материал поступил в редакцию 13.10.2010 г.