

Численные эксперименты по идентификации мощности потока взвешенного вещества на дне моря в модели переноса примеси

В. С. Кочергин*, С. В. Кочергин

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

**e-mail: vskocher@gmail.com*

Поступила 09.09.2020 г.; принята к публикации 11.11.2020 г.; опубликована 25.03.2021 г.

Рассматривается вариационная ассимиляция модельных данных о концентрации взвешенного вещества в верхнем слое Азовского моря. Такая информация используется при апробации алгоритмов идентификации, чтобы протестировать возможность усвоения получаемых на основе спутниковой информации значений концентрации. Совместное использование оценок поверхностных значений концентрации и результатов моделирования на основе модели переноса представляет интерес с точки зрения определения мощности источников поступления взвешенного вещества. Решена тестовая задача определения искомого параметра в краевом условии на дне моря при параметризации поступления (взмучивания) взвеси из донных отложений вследствие динамических процессов в придонном слое. Реализованы два подхода к поиску искомой константы для используемой в расчетах параметризации. При определении переменного по пространству потока взвешенного вещества на дне моря применяется вариационный алгоритм идентификации, основанный на решении сопряженных задач. Ассимиляция данных измерений в модели переноса пассивной примеси позволяет определить пространственную структуру таких потоков на заданном интервале времени. При реализации вариационного алгоритма идентификации применяются градиентные методы нахождения оптимальных оценок путем минимизации квадратичного функционала качества прогноза. Решение сопряженной задачи используется для построения градиента функционала качества прогноза. В направлении этого градиента выполняется спуск. При реализации вариационной процедуры решаются основная, сопряженная задачи и задача в вариациях, необходимая для определения итерационного параметра. Используемые в расчетах поля течений и коэффициенты турбулентной диффузии были получены при помощи динамической модели Азовского моря в сигма-координатах при интенсивном восточном ветровом воздействии.

Ключевые слова: концентрация взвешенного вещества, вариационный алгоритм, ассимиляция, сопряженная задача, Азовское море, ассимиляция данных измерений, потоки вещества.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0555-2021-0005 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

© Кочергин В. С., Кочергин С. В., 2021



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0) License

Для цитирования: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Численные эксперименты по идентификации мощности потока взвешенного вещества на дне моря в модели переноса примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. 2021. № 1. С. 23–33. doi:10.22449/2413-5577-2021-1-23-33

Numerical Experiments to Identify Suspended Matter Flow Rate over the Seabed in a Model of Impurity Transport

V. S. Kochergin*, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute of RAS, Sevastopol, Russia

**e-mail: vskocher@gmail.com*

Submitted 09.09.2020; revised 11.11.2020; published 25.03.2021

The paper deals with variation assimilation of model data on the concentration of suspended matter in the upper layer of the Sea of Azov. Such information is used during practical evaluation of identification algorithms to test the assimilation of concentration values derived from satellite information. Combined use of surface concentration estimates and modeling results based on the transport model is of interest for determining the strength of sources of suspended matter inflow. The test problem has been solved of determination of the required parameter in the sea bottom boundary condition when parameterizing the sediment inflow (agitation) from bottom sediments due to dynamic processes in the sea bottom layer. Two approaches to search for the required constant for the parameterization used in the calculations are implemented. A variational identification algorithm based on adjoint problem solving is used in determining the spatially variable flow of suspended matter on the seabed. The assimilation of measurement data into a model of passive admixture transport allows to determine the spatial structure of such flows at a given time interval. When implementing the variational identification algorithm, gradient methods are used to find optimal estimates by minimizing the quadratic functional of the prognosis quality. The solution of the adjoint problem is used to construct the gradient of the prognosis quality functional. Descent is performed in the direction of this gradient. During realization of variational procedure the main problem, the adjoint problem and the problem in variations, which is necessary to determine an iteration parameter, are solved. The flow fields and turbulent diffusion coefficients used in the calculations were obtained using a dynamic model of the Sea of Azov in sigma coordinates under exposure to intense easterly wind.

Keywords: suspended matter concentration, variational identification algorithm, assimilation, adjoint problem, Sea of Azov, assimilation of measurement data, flow of matter.

Acknowledgements: The research is performed under state order on topic No. 0555-2021-0005 “Complex interdisciplinary research of oceanologic processes, which determine functioning and evolution of the Black and Azov Sea coastal ecosystems” (“Coastal studies” code name).

For citation: Kochergin, V.S. and Kochergin, S.V., 2021. Numerical Experiments to Identify Suspended Matter Flow Rate on the Sea Bottom in the Impurity Transport Model. *Ecological Safety of Coastal and Shelf Zones of Sea*, (1), pp. 23–33. doi:10.22449/2413-5577-2021-1-23-33 (in Russian).

Введение

Для описания динамики взвешенного вещества в море необходимо использовать не только продвинутые динамические модели [1–3], модели переноса и трансформации примесей, но и алгоритмы идентификации входных параметров этих моделей на основе ассимиляции данных измерений. Модели, позволяющие моделировать взмучивание со дна, содержат множество эмпирических параметров и параметров подгонки для более корректного описания происходящих процессов. Критерием качества той или иной модели является ее соответствие объективной реальности, т. е. данным измерений. В последние годы с развитием спутниковой океанографии появились современные методы обработки изображений и их трансформации в цифровой формат [4]. Такая информация может быть получена в оперативном режиме, поэтому разработка и апробация методов определения тех или иных параметров численного моделирования является актуальной задачей. Данная работа посвящена построению вариационных алгоритмов для определения потоков взвешенного вещества в модели переноса пассивной примеси с простейшей параметризацией взмучивания донных отложений. Для идентификации константы в используемой параметризации реализованы два вариационных подхода: с использованием метода, основанного на решении сопряженных уравнений [5, 6], и метода линеаризации. Обширный обзор по вариационным методам ассимиляции данных измерений представлен в работе [7]. Вариационный подход, основанный на решении сопряженных задач, активно используется при решении широкого класса задач [8–11]. Два алгоритма, рассмотренных в данной работе, дали сравнимые результаты. Если первый позволяет определять параметры переменные по пространству и времени, то второй более прост в реализации при идентификации констант.

При численной реализации алгоритмов поиска оптимальных оценок используются градиентные методы минимизации квадратичного функционала качества прогноза. Необходимо решить сопряженную задачу, чтобы построить градиент функционала. Итерационный спуск выполняется в направлении этого градиента. При реализации вариационной процедуры интегрируются основная, сопряженная задачи и задачи в вариациях. Задача в вариациях используется при определении итерационного параметра для градиентного спуска. В случае реализации метода линеаризации параллельно основной задаче решается соответствующая задача в вариациях. В процессе интегрирования указанных задач применяются *TVD*-аппроксимации [12]. Используемые для реализации процедуры ассимиляции поля течений и коэффициенты турбулентной диффузии были получены по модели [2, 3] в сигма-координатах для акватории Азовского моря при восточном ветровом воздействии.

Методы

В качестве модели переноса пассивной примеси [2, 3] рассмотрим уравнение в σ -координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + LC = 0 \quad (1)$$

со следующими условиями на боковых границах:

$$\Gamma: \frac{\partial C}{\partial n} = 0. \quad (2)$$

На поверхности и на дне задаются краевые условия вида

$$\begin{aligned} \sigma = 0: \quad & \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \\ \sigma = -1: \quad & \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Q(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \gamma \cdot |u|^3, \end{aligned} \quad (3)$$

а начальные данные заданы следующим образом:

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma). \quad (4)$$

В формулах (1)–(4)

$$L = \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial}{\partial \sigma}; \quad t \in [0, T] - \text{ время};$$

$|u| = \sqrt{U^2 + V^2}$; D – динамическая глубина; x, y – горизонтальные координаты; σ – безразмерная вертикальная координата, изменяющаяся в пределах от -1 (на дне) до 0 (на поверхности моря); U, V, W – компоненты поля скорости; C – концентрация примеси; A_H и K – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно; n – нормаль к боковой границе; Γ – граница области M ; $M_t = M \cdot [0, T]$.

Вариационный алгоритм ассимиляции

Задача ассимиляции данных измерений решается путем минимизации выпуклого квадратичного функционала качества прогноза:

$$I_0 = \frac{1}{2} \left(P(RC - C_{\text{изм}}), P(RC - C_{\text{изм}}) \right)_{M_t}, \quad (5)$$

где P – оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений; R – оператор проектирования в точки наблюдений. Запишем функционал (5) при линейных ограничениях (1)–(4) в виде

$$\begin{aligned} I = I_0 + & \left(\frac{\partial C}{\partial t} + LC, C^* \right)_{M_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_M + \\ & + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{\sigma_t^0} + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{\sigma_t^{-1}} - (Q(x, y), C^*)_{\sigma_t^{-1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

При соответствующей параметризации потока на дне последнее слагаемое имеет вид $-(\gamma \cdot |u|^3, C^*)_{\sigma_t^{-1}}$. Скалярное произведение в формуле (6) определяется в L_2 стандартным образом. Проинтегрируем по частям соответствующее формуле (6) выражение для вариации функционала с учетом аналога

уравнения неразрывности и краевых условий, выбрав в качестве множителей Лагранжа решение следующей задачи:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} + L^* C^* = P(C_{\text{изм}} - RC), \quad (7)$$

$$\Gamma: \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0: \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1: \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (8)$$

$$t = T: C^* = 0,$$

где L^* – оператор, формально сопряженный к оператору L .

Тогда, исходя из стационарности функционала и определения его градиента, имеем

$$\nabla_{Q(x,y)} I = \int_0^T C^* (-1, x, y, t) dt, \quad \text{или} \quad \nabla_{\gamma} I = \int_{\sigma_i^{-1}} |u|^3 C^* (-1, x, y, t) dx dy dt.$$

Значение мощности источника ищем итерационно:

$$Q^{n+1}(x, y) = Q^n(x, y) + \tau \cdot \nabla_{Q(x,y)} I, \quad \text{или} \quad \gamma^{n+1} = \gamma^n + \tau \cdot \nabla_{\gamma} I,$$

где τ – итерационный параметр, который определяется [13] с учетом решения задачи в вариациях исходя из минимума функционала (5) по следующей формуле:

$$\tau = \frac{\left(P(RC - C^{\text{изм}}), PR\delta C \right)_{M_t}}{\left(PR\delta C, PR\delta C \right)_{M_t}}. \quad (9)$$

В выражении (9) δC – решение соответствующей задачи в вариациях.

Метод линеаризации

При выборе γ в качестве параметра, который необходимо идентифицировать, поставленная задача может быть решена на основе метода линеаризации [14]. Пусть $\frac{\delta C}{\delta \gamma}$ – вариация функции C относительно искомого параметра γ . Следуя работе [13], поставим в соответствие задаче (2)–(4) задачу в вариациях:

$$\frac{\partial D}{\partial t} \frac{\delta C}{\delta \gamma} + L \frac{\delta C}{\delta \gamma} = 0 \quad (10)$$

со следующими условиями на боковых границах:

$$\Gamma: \frac{\partial}{\partial n} \frac{\delta C}{\delta \gamma} = 0. \quad (11)$$

На поверхности и на дне задаются краевые условия вида

$$\begin{aligned} \sigma = 0: \quad \frac{\partial \frac{\delta C}{\delta \gamma}}{\partial \sigma} &= 0, \\ \sigma = -1: \quad \frac{\partial \frac{\delta C}{\delta \gamma}}{\partial \sigma} &= |u|^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Задача (10)–(12) решается с нулевыми начальными данными.

Пусть задача (5)–(8) решается на интервале времени $[0, T]$ в области M . Тогда для решения задачи идентификации параметра γ требуется найти минимум следующего функционала (5).

Представим переменную C в виде

$$C = \bar{C} + \frac{\delta C}{\delta \gamma} (\gamma - \gamma^*), \quad (13)$$

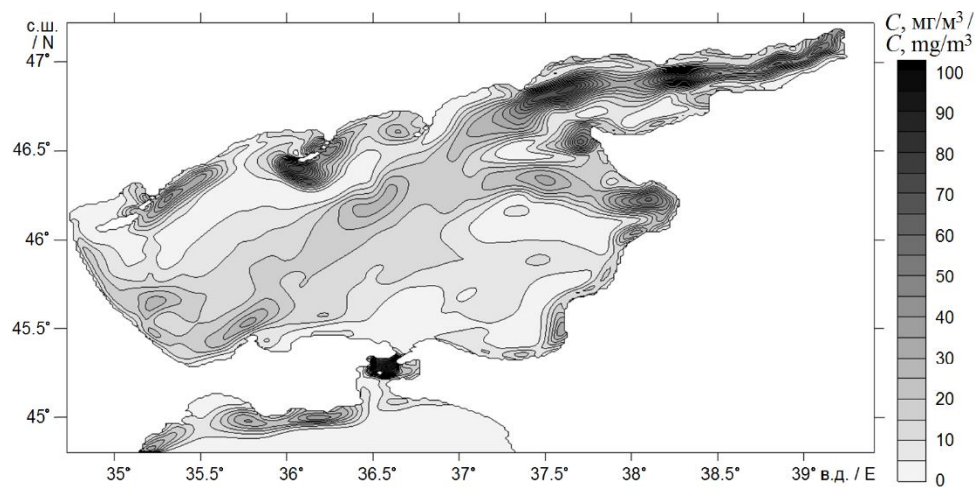
где \bar{C} – некоторая оценка концентрации загрязнения; γ – истинное значение параметра, подлежащее определению. После подстановки выражения (13) в формулу (5) и условия стационарности функционала получаем

$$\gamma^* = \gamma_p + \frac{\left(P(RC - C_{\text{изм}}), PR \frac{\delta C}{\delta \gamma} \right)_{M_t}}{\left(PR \frac{\delta C}{\delta \gamma}, PR \frac{\delta C}{\delta \gamma} \right)_{M_t}}. \quad (14)$$

Формулы (9), (14) справедливы и для случая, когда измерения поступают, например, только с поверхности моря. Задача построения функционала качества (5) решается путем соответствующего выбора проекционных операторов P и R .

Результаты и обсуждения

Входная информация для проведения расчетов по модели переноса примеси генерировалась при помощи гидродинамической модели [2, 3] для Азовского моря. Динамическая модель интегрировалась до квазиустановившегося решения при постоянном восточном ветровом воздействии со скоростью 10 м/с. Полученные поля скоростей и коэффициенты модели задавались в качестве входных параметров при интегрировании модели переноса пассивной примеси на срок $T = 2$ сут. В расчетах использовался шаг по времени $\Delta t = 240$ с и шаг по пространству $\Delta x = 0.78$ км, $\Delta y = 1.125$ км. По вертикали используется расчетная сетка в σ -координатах с 15 горизонтами. Поле концентрации, полученное по модели с использованием параметризации потоков вещества на дне моря пропорционально кубу модуля скорости в придонном слое (3), представлено на рис. 1. Эта информация на поверхности моря использовалась в качестве данных измерений. При реализации метода линеаризации для идентификации параметра γ , в силу линейности модели и

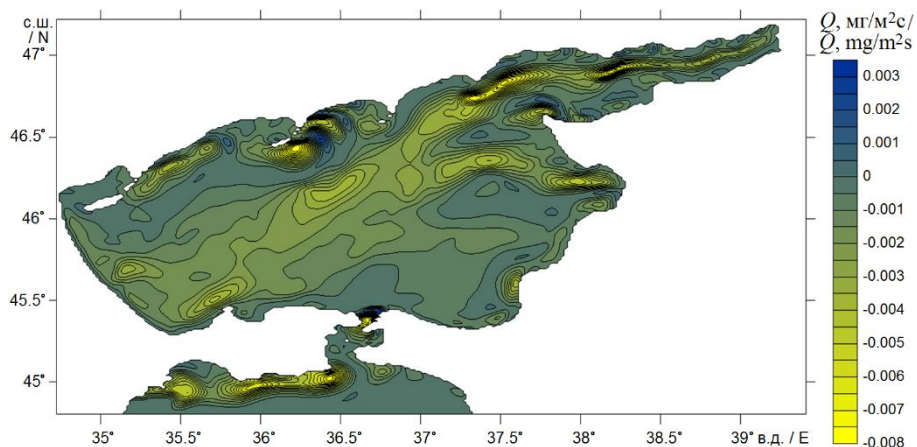


Р и с . 1 . Модельное поле концентрации ($\sigma = 0$)

Fig . 1 . Simulated concentration field ($\sigma = 0$)

точности данных измерений, достаточно одной итерации. Аналогичный результат получен и при идентификации γ вариационным методом, основанным на решении сопряженных задач. При решении задачи идентификации постоянной γ более экономичным с точки зрения вычислительных ресурсов является метод линеаризации, так как задача в вариациях решается один раз, а при реализации вариационного алгоритма, основанного на решении сопряженных задач, возникает необходимость интегрировать и их. Поэтому при численной реализации задачи определения постоянной γ более эффективным является метод линеаризации.

Использование вариационного подхода, основанного на решении сопряженных задач, позволяет определять переменные по пространству потока вещества на дне моря. Результат поиска $Q(x, y)$ представлен на рис. 2.



Р и с . 2 . Поток вещества на дне ($\text{мг}/\text{м}^2\text{с}$)

Fig . 2 . Matter flow on the seabed ($\text{mg}/\text{m}^2\text{s}$)

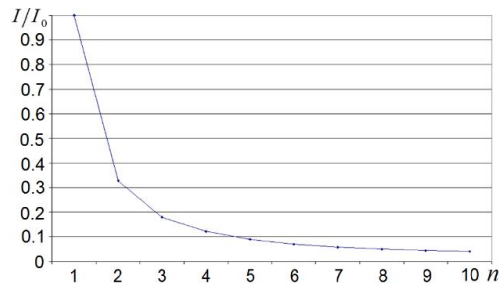


Рис. 3. Сходимость нормированного функционала качества прогноза

Fig. 3. Convergence of the normed functional of the prognosis quality

Найденное поле потока вещества на дне моря в целом хорошо коррелирует с используемой информацией о концентрации взвешенного вещества в верхнем слое моря с динамически активными областями моря, с особенностями рельефа дна, т. е. косами и банками, где происходит взмучивание. Отметим, что в данном случае алгоритм определения $Q(x, y)$ реализуется итерационно. Процесс падения нормированного функционала качества прогноза в зависимости от номера итерации представлен на рис. 3. За 10 итераций ошибка восстановления модельного поля концентрации на конечный момент времени достигает значений менее 5 %.

Заключение

Таким образом, в результате численных экспериментов показано, что при идентификации постоянного параметра достаточно использовать метод линеаризации. При определении переменного по пространству потока вещества хорошей точностью и сходимостью обладает вариационный метод ассимиляции данных измерений, основанный на решении сопряженных задач. Протестированные алгоритмы могут быть апробированы при усвоении реальной спутниковой информации о концентрации взвешенного вещества в море в процессе решения различных задач экологической направленности в акваториях Азовского и Черного морей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blumberg A. F., Mellor G. L.* A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model // Three-dimensional coastal ocean models / N. S. Heaps (ed.). Washington, DC : American Geophysical Union, 1987. P. 1–16. (Coastal and estuarine sciences ; vol. 4). <https://doi.org/10.1029/CO004>
2. *Фомин В. В.* Численная модель циркуляции вод Азовского моря // Труды Украинского научно-исследовательского гидрометеорологического института. Киев, 2002. Вып. 249. С. 246–255.
3. *Иванов В. А., Фомин В. В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне море–суша. Севастополь : ЭКОСИ-Гидрофизика, 2008. 363 с.
4. Определение концентрации взвешенного вещества в Черном море по данным спутника MODIS / Д. А. Кременчуцкий [и др.] // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь : ЭКОСИ-Гидрофизика, 2014. Вып. 29. С. 5–9.

5. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М. : Наука, 1982. 320 с.
6. *Marchuk G. I., Penenko V. V.* Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment // *Modelling and Optimization of Complex System* / G. I. Marchuk (ed.). Berlin : Springer, 1979. P. 240–252. <https://doi.org/10.1007/BFb0004167>
7. *Shutyaev V. P.* Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019. Vol. 55, iss. 1. P. 17–31. doi:10.1134/S0001433819010080
8. *Shutyaev V. P., Le Dimet F.-X., Parmuzin E.* Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation // *Non-linear Processes in Geophysics*. 2018. Vol. 25, iss. 2. P. 429–439. <https://doi.org/10.5194/npg-25-429-2018>
9. Numerical modeling of ocean hydrodynamics with variational assimilation of observational data / V. B. Zalesny [et al.] // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2016. Vol. 52, iss. 4. P. 431–442. <https://doi.org/10.1134/S0001433816040137>
10. *Shutyaev V. P., Parmuzin E. I.* Sensitivity of functionals to observation data in a variational assimilation problem for a sea thermodynamics model // *Numerical Analysis and Applications*. 2019. Vol. 12, iss. 2. P. 191–201. <https://doi.org/10.1134/S1995423919020083>
11. *Кочергин В. С., Кочергин С. В.* Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма // *Морской гидрофизический журнал*. 2015. № 2. С. 79–88. doi:10.22449/0233-7584-2015-2-79-88
12. *Harten A.* On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1984. Vol. 21, iss. 1. P. 1–23. <https://doi.org/10.1137/0721001>
13. *Кочергин С. В., Кочергин В. С.* Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*. Севастополь : ЭКОСИ-Гидрофизика, 2010. Вып. 22. С. 240–244.
14. *Горский В. Г.* Планирование кинетических экспериментов. М. : Наука, 1984. 241 с.

Об авторах:

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник, Морской гидрофизический институт РАН (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), **Scopus Author ID: 55236323700, ResearcherID: AAG-4209-2020**, vskoher@gmail.com

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник, Морской гидрофизический институт РАН (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0002-3583-8351, ResearcherID: AAG-4206-2020**, ko4ep@mail.ru

Вклад авторов:

Кочергин Владимир Сергеевич – численная реализация расчетов, анализ результатов, написание и оформление статьи

Кочергин Сергей Владимирович – постановка задачи, анализ результатов расчетов

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Blumberg, A.F. and Mellor, G.L., 1987. A Description of a Three-Dimensional Coastal Ocean Circulation Model. In: N.S. Heaps, ed., 1987. *Three-Dimensional Coastal Ocean Models*. Washington, DC: American Geophysical Union, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1029/CO004p0001>
2. Fomin, V.V., 2002. Numerical Model of the Circulation of Waters in the Sea of Azov. In: UHMI, 2002. *Trudy UkrNIGMI* [Proceedings of UHMI]. Kiev: UHMI. Iss. 249, pp. 246–255 (in Russian).
3. Ivanov, V.A. and Fomin, V.V., 2010. *Mathematical Modeling of Dynamical Processes in the Sea–Land Area*. Kyiv: Akadempriodyka, 286 p. <https://doi.org/10.15407/akadempriodyka.158.286>
4. Kremenchutskiy, D.A., Kubryakov, A.A., Zav'yalov, P.O., Konovalov, B.V., Stanichniy, S.V. and Aleskerova, A.A., 2014. Determination of the Suspended Matter Concentration in the Black Sea Using to the Satellite MODIS Data. In: MHI, 2014. *Ekologicheskaya Bezopasnost' Pribrezhnykh i Shel'fovykh Zon i Kompleksnoe Ispol'zovanie Resursov Shel'fa* [Ecological Safety of Coastal and Shelf Zones and Comprehensive Use of Shelf Resources]. Sevastopol: ECOSI-Gidrofizika. Iss. 29, pp. 5–9 (in Russian).
5. Marchuk, G.I., 1986. *Mathematical Models in Environmental Problems*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 216 p.
6. Marchuk, G.I. and Penenko, V.V., 1979. Application of Optimization Methods to the Problem of Mathematical Simulation of Atmospheric Processes and Environment. In: G.I. Marchuk, ed., 1979. *Modelling and Optimization of Complex System*. Berlin: Springer, pp. 240–252. <https://doi.org/10.1007/BFb0004167>
7. Shutyaev, V.P., 2019. Methods for Observation Data Assimilation in Problems of Physics of Atmosphere and Ocean. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 55(1), pp. 17–31. doi:10.1134/S0001433819010080
8. Shutyaev, V.P., Le Dimet, F.-X. and Parmuzin, E., 2018. Sensitivity Analysis with Respect to Observations in Variational Data Assimilation for Parameter Estimation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 25(2), pp. 429–439. <https://doi.org/10.5194/npg-25-429-2018>
9. Zalesny, V.B., Agoshkov, V.I., Shutyaev, V.P., Le Dimet, F. and Ivchenko, B.O., 2016. Numerical Modeling of Ocean Hydrodynamics with Variational Assimilation of Observational Data. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 52(4), pp. 431–442. <https://doi.org/10.1134/S0001433816040137>
10. Shutyaev, V.P. and Parmuzin, E.I., 2019. Sensitivity of Functionals to Observation Data in a Variational Assimilation Problem for a Sea Thermodynamics Model. *Numerical Analysis and Applications*, 12(2), pp. 191–201. <https://doi.org/10.1134/S1995423919020083>
11. Kochergin, V.S. and Kochergin, S.V., 2015. Identification of a Pollution Source Power in the Kazantip Bay Applying the Variation Algorithm. *Physical Oceanography*, (2), pp. 69–76. doi:10.22449/1573-160X-2015-2-69-76
12. Harten, A., 1984. On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(1), pp. 1–23. <https://doi.org/10.1137/0721001>
13. Kochergin, S.V. and Kochergin, V.S., 2010. Using of Variational Principles and Adjoint Problem Decision During Identification of Input Parameters of Passive Impurity Transport Model. In: MHI, 2010. *Ekologicheskaya Bezopasnost'*

Pribrezhnykh i Shel'fovykh Zon i Kompleksnoe Ispol'zovanie Resursov Shel'fa [Ecological Safety of Coastal and Shelf Zones and Comprehensive Use of Shelf Resources]. Sevastopol: ECOSI-Gidrofizika. Iss. 22, pp. 240–244 (in Russian).

14. Gorsky, V.G., 1984. [*Planning of Kinetic Experiments*]. Moscow: Nauka, 241 p. (in Russian).

About the authors:

Vladimir S. Kochergin, Junior Research Associate, Marine Hydrophysical Institute of RAS (2 Kapitanskaya St., Sevastopol, 299011, Russian Federation), **Scopus Author ID: 55236323700**, **ResearcherID: AAG-4209-2020**, *vskocher@gmail.com*

Sergey V. Kochergin, Senior Research Associate, Marine Hydrophysical Institute of RAS (2 Kapitanskaya St., Sevastopol, 299011, Russian Federation), Ph.D. (Phys-Math.), **ORCID ID: 0000-0002-3583-8351**, **ResearcherID: AAG-4206-2020**, *ko4ep@mail.ru*

Contribution of the authors:

Vladimir S. Kochergin – numerical implementation of calculations, analysis of results, writing and composition of the article

Sergey V. Kochergin – problem statement, analysis of calculation results

All the authors have read and approved the final manuscript.