

Восстановление концентрации взвешенного вещества в верхнем слое Азовского моря на основе вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений

В. С. Кочергин*, С. В. Кочергин

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

**e-mail: vskocher@gmail.com*

Поступила: 25.02.2020 г.; принята к публикации 08.05.2020 г.; опубликована 25.06.2020 г.

Целью работы является апробация вариационного алгоритма и создание программного кода для ассимиляции данных измерений концентрации взвешенного вещества. В работе рассматривается пример вариационной ассимиляции данных о концентрации взвешенного вещества в верхнем слое Азовского моря. Наиболее оперативной является информация, получаемая со спутников, но в ней часто существуют пропуски из-за причин различного характера, в том числе из-за рассеивающего эффекта облачности. Поэтому с учетом спутниковой информации было построено решение модели, из которого выбирались данные измерений с пропусками. Такая информация имитировала наличие облачности. При численной реализации модели переноса пассивной примеси использовались результаты расчетов по динамической модели Азовского моря, градиентные методы минимизации функционала качества прогноза и решение сопряженной задачи для построения его градиента в пространстве параметров. При реализации вариационной процедуры производится интегрирование основной, сопряженной задач и задачи в вариациях, которая необходима для определения итерационного параметра при осуществлении градиентного спуска. В процессе интегрирования указанных задач используются *TVD*-аппроксимации. В результате проведенных численных экспериментов показана надежная работа процедуры в заданных условиях, что позволяет восстанавливать начальное поле с хорошей точностью. Реализованный вариационный алгоритм ассимиляции данных измерений может быть применен при идентификации входных параметров численного моделирования по распределенной по пространству и времени информации для решения различных задач экологической направленности.

Ключевые слова: концентрация взвешенного вещества, вариационный алгоритм, ассимиляция, сопряженная задача, Азовское море, ассимиляция данных измерений, пространственно-временная интерполяция.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей».

© Кочергин В. С., Кочергин С. В., 2020



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0) License

Для цитирования: Кочергин В. С., Кочергин С. В. Восстановление концентрации взвешенного вещества в верхнем слое Азовского моря на основе вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. 2020. № 2. С. 17–27. doi:10.22449/2413-5577-2020-2-17-27

Recovery of the Concentration of Suspended Matter in the Upper Layer of the Sea of Azov Based on a Variational Algorithm for Assimilation of Measurement Data

V. S. Kochergin*, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute of RAS, Sevastopol, Russia

**e-mail: vskocher@gmail.com*

Submitted 25.02.2020; revised 08.05.2020; published 25.06.2020

The purpose of this work is to test the variation algorithm and create a program code for assimilation of the measured concentration of suspended matter. The paper considers an example of variational assimilation of data on the concentration of suspended matter in the upper layer of the Azov Sea. The most up-to-date information is received from satellites, but it often contains omissions due to various reasons, including the scattering effect of clouds. Therefore, taking into account satellite information, a model solution was developed from which measurement data with omissions were selected. This information simulated presence of clouds. The numerical implementation of the passive impurity transport model used the results of calculations based on the dynamic model of the Sea of Azov, gradient methods for minimizing the forecast quality function, and the solution of an adjoint problem for constructing its gradient in the parameter space. When implementing the variation procedure, integration is performed of the main and adjoint tasks as well as the task in variations. The last is necessary for determining the iterative parameter when performing a gradient descent. Integration problems are solved using TVD approximations. As a result of numerical experiments, the reliable operation of the procedure under the specified conditions is shown, which allows to restore the initial field with good accuracy. The implemented variational algorithm for assimilation of measurement data can be applied to identify the input parameters of numerical modeling based on information distributed over time and space to solve various environmental problems.

Keywords: concentration of suspended matter, variation algorithm, assimilation, adjoint problem, Sea of Azov, assimilation of measurement data, space-time interpolation.

Acknowledgments: the research is performed under state order on topic No. 0827-2018-0004 “Complex interdisciplinary research of oceanologic processes, which determine functioning and evolution of the Black and Azov Sea coastal ecosystems”.

For citation: Kochergin, V.S. and Kochergin, S.V., 2020. Recovery of the Concentration of Suspended Matter in the Upper Layer of the Azov Sea Based on a Variational Algorithm for Assimilation of Measurement Data. *Ecological Safety of Coastal and Shelf Zones of Sea*, (2), pp. 17–27. doi:10.22449/2413-5577-2020-2-17-27 (in Russian).

Введение

Возрастающая антропогенная нагрузка на Азово-Черноморский бассейн, обусловленная его интенсивным освоением и развитием транспортных артерий, требует создания систем комплексного мониторинга экологической обстановки для оперативного и адекватного принятия решений. Основными элементами таких систем должны являться численные модели динамики вод [1, 2], модели распространения и трансформации загрязнений [3, 4], а также алгоритмы ассимиляции данных измерений [5–11] для настройки указанных моделей с целью корректного описания моделируемых процессов. Обширный обзор по данной тематике представлен в работе [8]. Вариационный подход может быть применен для решения широкого класса задач [12, 13]. В данной работе рассматривается пример вариационной ассимиляции данных о концентрации взвешенного вещества в верхнем слое Азовского моря.

Наиболее оперативной является информация, получаемая со спутников, но в ней часто существуют пропуски из-за причин различного характера, в том числе из-за рассеивающего эффекта облачности. Современные методы обработки спутниковых данных позволяют получать оперативную информацию о концентрации примеси по снимкам поверхности моря в оптическом диапазоне [14]. Совместное использование значений поверхностной концентрации примеси и моделей переноса представляет интерес не только для определения источников поступления взвешенного вещества, но и для восполнения пропусков в самих данных измерений. Поэтому задача восстановления данных для промежутков времени с отсутствующей информацией является важной и актуальной. В работе решена тестовая задача, при реализации которой в данных измерений имеются существенные пропуски, а именно – информация в определенный момент времени задается только для половины моря, а данные относительно второй половины моря появляются в последующие сутки. Таким образом мы имитируем наличие облачности над акваторией моря.

Целью работы является апробация алгоритма и создание работоспособного программного кода для реализации вариационной процедуры ассимиляции данных измерений, распределенных по пространству и времени. Сама модель как неотъемлемая часть вариационного алгоритма ассимиляции выступает в роли пространственно-временного интерполянта [15], и получаемое при этом решение задачи на всем интервале времени согласовано не только с моделью, но и с данными измерений.

В работе в качестве параметра, подлежащего идентификации, было выбрано начальное поле концентрации. Такое совместное использование спутниковых данных, моделей переноса пассивной примеси и вариационных методов ассимиляции данных измерений представляет интерес для определения пространственной структуры взвешенного вещества на заданном интервале времени. Более того, при адекватном описании вертикальных динамических процессов появляется возможность исследования вертикальной структуры полей концентрации.

При реализации алгоритма идентификации используются градиентные методы поиска оптимальных оценок за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза. Решение сопряженной задачи используется

для построения градиента функционала качества прогноза. При реализации вариационной процедуры производится интегрирование основной, сопряженной задач и задачи в вариациях, которая используется при определении итерационного параметра для осуществления градиентного спуска. В процессе интегрирования указанных задач применяются TVD-аппроксимации [16]. Для реализации процедуры ассимиляции используемые поля течений и коэффициенты турбулентной диффузии были получены по модели [1, 2] в сигма-координатах для акватории Азовского моря при восточном ветровом воздействии.

Методы

Рассмотрим модель переноса пассивной примеси [2, 3, 12] в σ -координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + LC = 0 \quad (1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma: \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0: \quad \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0 \\ \sigma = -1: \quad \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (4)$$

где $L = \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial}{\partial \sigma}$, $t \in [0, T]$ – время; D – динамическая глубина; x, y – горизонтальные координаты; σ – безразмерная вертикальная координата, изменяющаяся в пределах от -1 (на дне) до 0 (на поверхности моря); U, V, W – компоненты поля скорости; C – концентрация примеси; A_H и K – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; n – нормаль к боковой границе; Γ – граница области интегрирования модели M ; $M_t = M \times [0, T]$.

Рассмотрим вариационный алгоритм ассимиляции. Задача усвоения данных измерений решается за счет минимизации выпуклого квадратичного функционала качества прогноза:

$$I_0 = \frac{1}{2} \left(P(RC - C^{\text{изм}}), P(RC - C^{\text{изм}}) \right)_{M_t}, \quad (5)$$

где P – оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений; R – оператор проектирования в точки наблюдений. Функционал (5) при линейных ограничениях (1)–(4) запишем в виде

$$I = I_0 + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + LC, C^* \right)_{M_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{\sigma_t^0} + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{\sigma_t^{-1}}, \quad (6)$$

где скалярное произведение в L_2 определяется стандартным образом. Проинтегрируем соответствующее (6) выражение для вариации функционала по частям с учетом аналога уравнения неразрывности и краевых условий. В выражении (6) $\sigma_t^0 = \sigma^0 \times [0, T]$, $\sigma_t^{-1} = \sigma^{-1} \times [0, T]$, σ^0 – поверхность моря, σ^{-1} – дно. Выберем в качестве множителей Лагранжа решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial DC^*}{\partial t} + L^* C^* &= P(C^{\text{изм}} - RC), \\ \Gamma: \frac{\partial C^*}{\partial n} &= 0, \quad \sigma = 0: \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1: \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \\ t = T: C^* &= 0, \end{aligned}$$

где L^* – формально сопряженный оператор к L .

При идентификации начального поля имеем

$$\nabla_{C_0} I = -C^* \Big|_{t=0}.$$

Начальное приближение задается равным нулю, а следующее приближение ищется по формуле

$$C_0^{n+1} = C_0^n + \tau \nabla_{C_0} I,$$

где τ – итерационный параметр, который определяется с учетом решения задачи в вариациях, исходя из минимума функционала (5) по следующей формуле:

$$\tau = \frac{\left(P(RC - C^{\text{изм}}), PR\delta C \right)_{M_t}}{\left(PR\delta C, PR\delta C \right)_{M_t}}. \quad (7)$$

В выражении (7) δC – решение следующей задачи в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{\partial D\delta C}{\partial t} + L\delta C &= 0, \\ \Gamma: \frac{\partial \delta C}{\partial n} &= 0, \\ \sigma = 0: \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} &= 0 \\ \sigma = -1: \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} &= 0, \end{aligned}$$

с начальными данными

$$\delta C(x, y, \sigma, 0) = -C^*(x, y, \sigma, 0).$$

Сравнение найденного в результате итераций начального поля C_0 с известным $\overline{C_0}$ будем производить в следующей норме:

$$NL = \frac{\sum_{N_M} |C - \bar{C}| \cdot 100\%}{\sum_{N_M} |\bar{C}|},$$

где N_M – множество точек расчетной сетки в области M .

Результаты и обсуждения

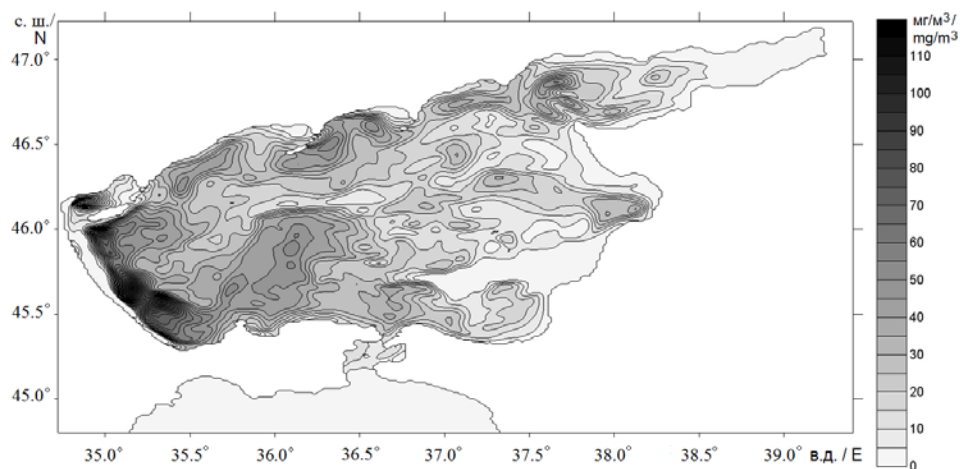
В качестве входной информации для модели переноса примеси использовались результаты расчетов по гидродинамической модели [2] для Азовского моря. Был проведен расчет на установление модельного поля течений с постоянным ветром скоростью 10 м/с восточного направления. Полученные поля скоростей и коэффициентов турбулентной диффузии использовались в качестве входных параметров при интегрировании модели переноса пассивной примеси на срок $T = 2$ сут. В расчетах шаг по времени $\Delta t = 240$ с, а шаг по пространству $\Delta x = 0.78$ км, $\Delta y = 1.125$ км. По вертикали в модели используется расчетная сетка в σ -координатах с 15 горизонтами.

Первоначально данные, представленные на рис. 1 (URL: <https://earthdata.nasa.gov/labs/worldview/?p=geographic&l=MODIS>), использовались для идентификации начального поля концентрации [17]. Рисунок характеризуется повышенными значениями концентрации взвешенного вещества в областях основных кос и банок, а также пониженной концентрацией в области бенча и теневых зон кос северного побережья (контрасты на море определяются изменением концентрации взвешенного вещества). Такое пространственное распределение примеси определяется сформированными в результате ветрового воздействия динамическими процессами. Особое значение при этом приобретает адекватное описание вертикальных динамических процессов. Напомним, что входные динамические параметры для модели переноса были получены при восточном ветровом воздействии.



Р и с . 1. Композит псевдоцветов *MODIS/Aqua*, 18 октября 2015 г. (контрасты на море определяются изменениями концентрации взвешенного вещества)

F i g . 1. MODIS/Aqua pseudo-color Composite, October 18, 2015 (sea contrasts are determined by changes in the concentration of suspended matter)



Р и с . 2. Начальное поле концентрации взвешенного вещества на поверхности моря при $t = 0$ ($\text{мг}/\text{м}^3$)

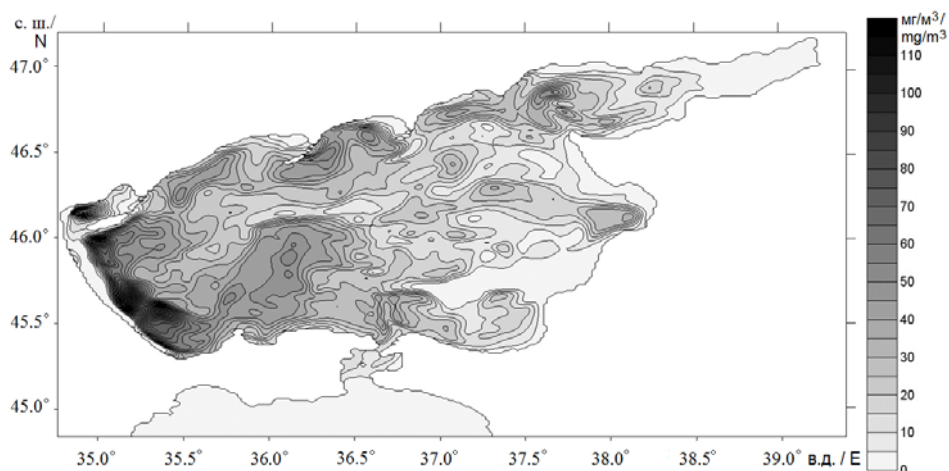
F i g . 2. Initial field of suspended substance concentration on the sea surface at $t = 0$ (mg/m^3)

Результат работы вариационной процедуры ассимиляции изображен на рис. 2. Далее модельное поле концентрации, полученное при интегрировании модели переноса на 2 сут, использовалось для формирования модельных данных с пропусками информации. Следует отметить, что полученные поля согласованы с использованной моделью, что важно при анализе точности восстановления поля на всем интервале времени. Считалось, что в конце первых суток модельного времени поступают поверхностные данные для левой половины моря, а в конце всего срока интегрирования – для правой. На первой итерации работы алгоритма начальное поле задавалось равным нулю.

В результате работы вариационной процедуры ассимиляции получено начальное поле, хорошо согласованное с первоначально заданным (рис. 3). Полученное поле характеризуется наличием основных особенностей пространственного распределения концентрации примеси в поверхностном слое моря. В процессе итераций значения нормы NL , характеризующей относительную суммарную ошибку идентификации начального поля концентрации примеси, представлены ниже:

n	0	1	2	3	4	5	10	20
$NL, \%$	100	15.38	9.82	4.76	3.67	3.05	1.79	1.12

Наибольшее падение значений нормы происходит на первых итерациях. После десятой итерации изменения NL не существенны. Полученное поле концентрации примеси согласовано с моделью и с используемой информацией для последующих моментов времени на поверхности моря в силу минимизации функционала (5). Процесс минимизации функционала качества прогноза представлен на рис. 4. Из рисунка видно, что для достижения минимума функционала с определенной точностью на данном интервале времени достаточно 3–4 итераций.

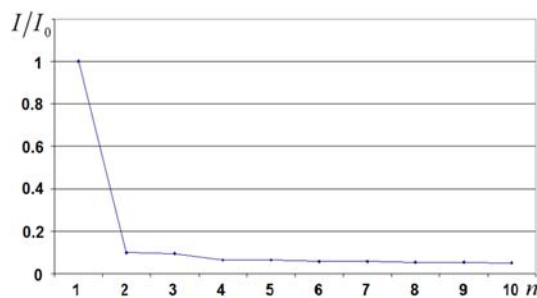


Р и с. 3. Полученное в процессе десяти итераций начальное поле концентрации взвешенного вещества на поверхности моря при $t = 0$ ($\text{мг}/\text{м}^3$)

F i g. 3. The initial field of concentrations of suspended substance, obtained after ten iterations, on the sea surface at $t = 0$ (mg/m^3)

Заклучение

Таким образом, в результате численного эксперимента показано, что вариационный алгоритм позволяет производить ассимиляцию данных измерений, распределенных по пространству и времени, за счет идентификации входных параметров моделирования. Сама модель, которая является ограничением на вариации входных параметров при минимизации функционала качества прогноза, выступает в роли пространственно-временного интерполянта. Результаты



Р и с. 4. Падение нормированного функционала качества в зависимости от номера итерации

F i g. 4. Drop in the normalized quality functional depending on the iteration number

могут быть использованы при решении различных задач экологической направленности в акваториях Азовского и Черного морей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blumberg A. F., Mellor G. L.* A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model // Three-dimensional coastal ocean models / N. S. Heaps (ed.). Washington, DC : American Geophysical Union, 1987. Vol. 4. P. 1–16. (Coastal and estuarine sciences ; Vol. 4). <https://doi.org/10.1029/CO004p0001>
2. *Фомин В. В.* Численная модель циркуляции вод Азовского моря // Труды Украинского научно-исследовательского гидрометеорологического института. Киев, 2002. Вып. 249. С. 246–255.
3. *Иванов В. А., Фомин В. В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне море–суша. Севастополь : ЭКОСИ-Гидрофизика, 2008. 363 с.

4. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М. : Наука, 1982. 320 с.
5. *Marchuk G. I., Penenko V. V.* Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment // *Modelling and Optimization of Complex System* / G. I. Marchuk (ed.). Berlin : Springer, 1979. P. 240–252. <https://doi.org/10.1007/BFb0004167>
6. *Marchuk G. I., Agoskov V. I., Shutyaev V. P.* Adjoint equations and perturbation algorithms in nonlinear problems. New York : CRC Press, 1996. 288 p. doi:10.1201/9781315136707
7. *Shutyaev V. P., Le Dimet F.-X., Parmuzin E.* Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2018. Vol. 25, iss. 2. P. 429–439. <https://doi.org/10.5194/npg-25-429-2018>
8. *Shutyaev V. P.* Methods for observation data assimilation in problems of physics of atmosphere and ocean // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019. Vol. 55, iss. 1. P. 17–31. doi:10.1134/S0001433819010080
9. Sensitivity of functionals in problems of variational assimilation of observational data / V. P. Shutyaev [et al.] // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2015. Vol. 51, iss. 3. P. 342–350.
10. Numerical modeling of ocean hydrodynamics with variational assimilation of observational data / V. B. Zalesny [et al.] // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2016. Vol. 52, iss. 4. P. 431–442. <https://doi.org/10.1134/S0001433816040137>
11. *Shutyaev V. P., Parmuzin E. I.* Sensitivity of functionals to observation data in a variational assimilation problem for a sea thermodynamics model // *Numerical Analysis and Applications*. 2019. Vol. 12, iss. 2. P. 191–201. <https://doi.org/10.1134/S1995423919020083>
12. *Kochergin V. S., Kochergin S. V.* Identification of a pollution source power in the Kazantip Bay applying the variation algorithm // *Physical Oceanography*. 2015. Iss. 2. P. 69–76. doi:10.22449/1573-160X-2015-2-69-76
13. *Кочергин С. В., Кочергин В. С.* Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*. Севастополь : ЭКОСИ-Гидрофизика, 2010. Вып. 22. С. 240–244.
14. Определение концентрации взвешенного вещества в Черном море по данным спутника MODIS / Д. А. Кременчуцкий [и др.] // *Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа*. Севастополь : ЭКОСИ-Гидрофизика, 2014. Вып. 29. С. 5–9.
15. *Пененко В. В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л. : Гидрометеиздат, 1981, 352 с.
16. *Harten A.* On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1984. Vol. 21, iss. 1. P. 1–23. <https://doi.org/10.1137/0721001>
17. *Кочергин В. С., Кочергин С. В., Станичный С. В.* Вариационная ассимиляция спутниковых данных поверхностной концентрации взвешенного вещества в Азовском море // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2020. Т. 17, № 2. С. 40–48. doi:10.21046/2070-7401-2020-17-2-40-48

Об авторах:

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник, Морской гидрофизический институт РАН (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), **Scopus Author ID: 55236323700**, **ResearcherID: AAG-4209-2020**, vskocher@gmail.com

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник, Морской гидрофизический институт РАН (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, д. 2), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0002-3583-8351**, **ResearcherID: AAG-4206-2020**, ko4ep@mail.ru

Вклад авторов:

Кочергин Владимир Сергеевич – проведение численных экспериментов, обсуждение результатов, их анализ и написание статьи

Кочергин Сергей Владимирович – постановка задачи, обсуждение результатов, их анализ и написание статьи

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Blumberg, A.F. and Mellor, G.L., 1987. A Description of a Three-Dimensional Coastal Ocean Circulation Model. In: N.S. Heaps, ed., 1987. *Three-Dimensional Coastal Ocean Models*. Washington, DC: American Geophysical Union, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1029/CO004p0001>
2. Fomin, V.V., 2002. Numerical Model of the Circulation of Waters in the Sea of Azov. In: UHMI, 2002. *Trudy UkrNIGMI* [Proceedings of UHMI]. Kiev: UHMI. Iss. 249, pp. 246–255 (in Russian).
3. Ivanov, V.A. and Fomin, V.V., 2008. [*Mathematical Modeling of the Dynamic Processes in the Zone Sea–Land*]. Sevastopol: ECOSI-Gidrofizika, 363 p. (in Russian).
4. Marchuk, G.I., 1986. *Mathematical Models in Environmental Problems*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 216 p.
5. Marchuk, G.I. and Penenko, V.V., 1979. Application of Optimization Methods to the Problem of Mathematical Simulation of Atmospheric Processes and Environment. In: G.I. Marchuk, ed., 1979. *Modelling and Optimization of Complex System*. Berlin: Springer, pp. 240–252. <https://doi.org/10.1007/BFb0004167>
6. Marchuk, G.I., Agoshkov, V.I. and Shutyaev, V.P., 1996. *Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems*. New York: CRC Press, 288 p. doi:10.1201/9781315136707
7. Shutyaev, V.P., Le Dimet, F.-X. and Parmuzin, E., 2018. Sensitivity Analysis with Respect to Observations in Variational Data Assimilation for Parameter Estimation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 25(2), pp. 429–439. <https://doi.org/10.5194/npg-25-429-2018>
8. Shutyaev, V.P., 2019. Methods for Observation Data Assimilation in Problems of Physics of Atmosphere and Ocean. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 55(1), pp. 17–31. doi:10.1134/S0001433819010080
9. Shutyaev, V.P., Le Dimet, F.-X., Agoshkov, V.I. and Parmuzin, E.I., 2015. Sensitivity of Functionals in Problems of Variational Assimilation of Observational Data. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 51(3), pp. 342–350. <https://doi.org/10.1134/S0001433815030111>
10. Zalesny, V.B., Agoshkov, V.I., Shutyaev, V.P., Le Dimet, F. and Ivchenko, B.O., 2016. Numerical Modeling of Ocean Hydrodynamics with Variational Assimilation

of Observational Data. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 52(4), pp. 431–442. <https://doi.org/10.1134/S0001433816040137>

11. Shutyaev, V.P. and Parmuzin, E.I., 2019. Sensitivity of Functionals to Observation Data in a Variational Assimilation Problem for a Sea Thermodynamics Model. *Numerical Analysis and Applications*, 12(2), pp. 191–201. <https://doi.org/10.1134/S1995423919020083>
12. Kochergin, V.S. and Kochergin, S.V., 2015. Identification of a Pollution Source Power in the Kazantip Bay Applying the Variation Algorithm. *Physical Oceanography*, (2), pp. 69–76. doi:10.22449/1573-160X-2015-2-69-76
13. Kochergin, S.V. and Kochergin, V.S., 2010. Using of Variational Principles and Adjoint Problem Decision During Identification of Input Parameters of Passive Impurity Transport Model In: MHI, 2010. *Ekologicheskaya Bezopasnost' Pribrezhnykh i Shel'fovykh Zon i Kompleksnoe Ispol'zovanie Resursov Shel'fa* [Ecological Safety of Coastal and Shelf Zones and Comprehensive Use of Shelf Resources]. Sevastopol: ECOSI-Gidrofizika. Iss. 22, pp. 240–244 (in Russian).
4. Kremenchutskiy, D.A., Kubryakov, A.A., Zav'yalov, P.O., Konovalov, B.V., Stanichniy, S.V. and Aleskerova, A.A., 2014. Determination of the Suspended Matter Concentration in the Black Sea Using to the Satellite MODIS Data. In: MHI, 2014. *Ekologicheskaya Bezopasnost' Pribrezhnykh i Shel'fovykh Zon i Kompleksnoe Ispol'zovanie Resursov Shel'fa* [Ecological Safety of Coastal and Shelf Zones and Comprehensive Use of Shelf Resources]. Sevastopol: ECOSI-Gidrofizika. Iss. 29, pp. 5–9 (in Russian).
15. Penenko, V.V., 1981. *Methods of Numerical Modeling for Atmospheric Processes*. Leningrad: Gidrometeoizdat, 350 p. (in Russian).
16. Harten, A., 1984. On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(1), pp. 1–23. <https://doi.org/10.1137/0721001>
17. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. and Stanichny, S.V., 2020. Variational Assimilation of Satellite Data on Surface Concentration of Suspended Matter in the Azov Sea. *Sovremennye Problemy Distantionnogo Zondirovaniya Zemli iz Kosmosa = Current Problems in Remote Sensing of the Earth From Space*, 17(2), pp. 40–48. doi:10.21046/2070-7401-2020-17-2-40-48 (in Russian).

About the authors:

Vladimir S. Kochergin, Junior Research Associate, Marine Hydrophysical Institute of RAS (2 Kapitanskaya St., Sevastopol, 299011, Russian Federation), **Scopus Author ID: 55236323700**, **ResearcherID: AAG-4209-2020**, vskocher@gmail.com

Sergey V. Kochergin, Senior Research Associate, Marine Hydrophysical Institute of RAS (2 Kapitanskaya St., Sevastopol, 299011, Russian Federation), Ph.D. (Phys-Math.), **ORCID ID: 0000-0002-3583-8351**, **ResearcherID: AAG-4206-2020**, ko4ep@mail.ru

Contribution of the authors:

Vladimir S. Kochergin – performance of numerical experiments, discussion of results and their analysis, composition of the article

Sergey V. Kochergin – task setting, discussion of results and their analysis, composition of the article

All the authors have read and approved the final manuscript.