

Ю.В.Манилюк, В.Ф.Санников

Морской гидрофизический институт, г.Севастополь

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕЙШЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ В БУХТЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В рамках линейного приближения теории длинных волн рассматриваются сейшевые колебания в частично замкнутом прямоугольном бассейне переменной глубины, изменяющейся по параболическому закону. Получено аналитическое решение для случая, когда на входе в бассейн расположена узловая линия уровня. Исследуются периоды, колебания уровня и скорости сейшевых течений. Получены оценки периодов старших мод сейш для Севастопольской бухты, Холмской бухты, бухты Алексева, Петрозаводской губы Онежского озера. Установлено, что аналитические оценки периодов сейш в указанных водоемах удовлетворительно согласуются с данными натурных наблюдений и со значениями, рассчитанными по формулам для бассейна с постоянной глубиной. Исключение составляют периоды моды Гельмгольца, для которых получаются заниженные значения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *сейши, частично замкнутый бассейн, мода Гельмгольца, Севастопольская бухта, Холмская бухта, Петрозаводская губа*

doi: 10.22449/2413-5577-2019-2-4-12

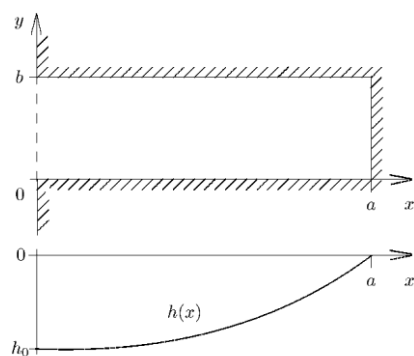
Введение. Исследование опасных морских явлений в бухтах, обусловленных воздействием резонансных колебаний (сейш), представляет значительный практический интерес. Это связано с тем, что сейши являются причиной такого опасного явления, как тягун [1], выражающегося в интенсивных периодических горизонтальных течениях, которые могут приводить к столкновениям судов, обрыву швартовых, затруднению погрузочно-разгрузочных операций. Также сейши могут вызывать сильные течения у входа в бухту, мешающие судоходству [1]. Для исследования сейшевых колебаний в бухтах используются различные методы. В последнее время получили распространение сложные численные модели, имеющие много разных параметров и требующие тщательной настройки. Для оперативных оценок характеристик сейш в бухте и калибровки численных моделей представляют интерес аналитические методы, позволяющие получить простые оценки параметров сейш и требующие минимального количества характеристик. В [2] приведены формулы для расчета периодов сейш в бухтах простой формы для случаев, когда движение зависит от одной пространственной координаты. В [3] исследуется влияние наклона дна на параметры сейшевых колебаний в прямоугольном бассейне с параболическим профилем дна. В [4] рассматриваются особенности сейш в эстуарии. В [5, 6] изучаются сейшевые колебания в прямоугольном бассейне постоянной глубины с открытым входом. Применение аналитических методов для исследования сейш в бассейнах переменной глубины затруднено тем, что движение жидкости в этом случае описывается дифференциальными уравнениями с пере-

© Ю.В.Манилюк, В.Ф.Санников, 2019

Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. 2019. вып.2. С.4-12.

менными коэффициентами. Но в отдельных случаях удается получить точное решение задачи. В частности, в [7, 8] для случая, когда движение жидкости зависит от одной пространственной переменной, приведены аналитические решения для замкнутого бассейна с параболическим профилем дна.

Целью настоящей работы является проверка возможности получения оценок параметров сейш в реальных водоемах, основанная на аналитическом решении задачи о свободных колебаниях в бассейне переменной глубины, изменяющейся по параболическому закону.



Р и с . 1 . Модель бухты.

Постановка задачи и аналитическое решение. Рассмотрим в линейном приближении свободные плоские длинные волны в бухте прямоугольной формы и переменной глубины $h = h(x)$ ($0 \leq x \leq a$), имеющей жидкую границу при $x = 0$ и твердую – при $x = a$, где a – длина бухты (рис.1). Предполагается, что ширина бухты b не будет оказывать влияние на параметры волн, если b мало в сравнении с a .

Предполагается, что все возмущающие факторы отсутствуют и влиянием вращения Земли можно пренебречь. В

линейном приближении теории длинных волн движение жидкости описывается системой уравнений [8]:

$$u_t = -g\zeta_x, \quad \zeta_t = -(hu)_x, \quad (1)$$

где t – время, x – пространственная переменная, $u(x, t)$ – скорость движения жидкости, $\zeta(x, t)$ – отклонение свободной поверхности, g – ускорение свободного падения.

В первом приближении ограничимся рассмотрением движения жидкости во внутренней области.

На твердой границе бассейна ($x = a$) должно выполняться условие непротекания

$$h(a)u(a, t) = 0. \quad (2)$$

На входе в бухту ($x = 0$) будем использовать условие [9, 10]

$$\zeta(0, t) = 0. \quad (3)$$

Фактически это условие связано с пренебрежением излучения через открытую границу [9], и его корректность основана на предположении относительной малости ширины входа в бухту. При таком условии на жидкой границе расположены узловые линии для всех мод свободных колебаний жидкости в рассматриваемом бассейне. Данное упрощение считается допустимым, если целью расчета является определение собственных частот и соответствующих им собственных функций [9, 10].

Умножая (1) на $h(x)$ и дифференцируя затем по t , находим

$$\frac{\partial^2 (hu)}{\partial t^2} = -gh \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right).$$

Затем подстановка в это уравнение выражения $\partial\zeta/\partial t$ из (1) позволяет получить уравнение для горизонтальной скорости

$$\frac{\partial^2(hu)}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2(hu)}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде стоячей волны

$$hu = h_0 u_0 f(x) \sin \sigma t. \quad (5)$$

где σ – частота колебаний жидкости, $h_0 = h(0)$, u_0 – характеристическая скорость.

Подставляя (5) в уравнение (4), имеем

$$h \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\sigma^2}{g} f = 0. \quad (6)$$

Краевые условия для этого уравнения выводятся из (2), (3)

$$df(0)/dx = 0, f(a) = 0. \quad (7)$$

Из (1) и (5) находим выражение для профиля свободной поверхности

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 a \frac{df(x)}{dx} \cos \sigma t, \quad \zeta_0 = h_0 u_0 / (a \sigma). \quad (8)$$

Итак, задача о стоячих волнах (сейсах) в бухте произвольной глубины $h(x)$ сводится к решению уравнения (6) с краевыми условиями (7). По известной функции $f(x)$ профиль свободной поверхности определяется формулой (8).

Проведем исследование сейшевых колебаний в бухте, глубина которой изменяется по параболическому закону

$$h(x) = h_0 \left(1 - (x/a)^2\right).$$

Введем новую переменную $r = x/a$, $x = ra$ и обозначим $f(x) = f(ra) = Q(r)$. В результате задача (6), (7) преобразуется к виду

$$(1 - r^2)Q''(r) + \mu Q(r) = 0; \quad Q'(0) = 0, \quad Q(1) = 0, \quad (9)$$

где $\mu = (\sigma a)^2 / (gh_0)$ – спектральный параметр.

Решение задачи (9) будем искать в виде ряда Тейлора по степеням r . Дифференцированием уравнения (9) выводится рекуррентная формула

$$(1 - r^2)Q^{(k+2)}(r) - 2krQ^{(k+1)}(r) + (\mu - (k-1)k)Q^{(k)}(r) = 0. \quad (10)$$

Учитывая граничное условие (9) в нуле, из (10) получим

$$Q^{(2n+1)}(0) = 0, \quad Q^{(2n+2)}(0) = (\mu_n - \mu)Q^{(2n)}(0), \quad \mu_n = (2n-1)2n.$$

Эти выражения позволяют записать ряд Тейлора функции $Q(r)$ в виде

$$Q(r) = Q(0) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} (\mu_0 - \mu)(\mu_1 - \mu) \dots (\mu_{m-1} - \mu) r^{2m} \right). \quad (11)$$

Заметим, что (10) при $k = 1$ представляет собой уравнение Лежандра [11], нетривиальные решения которого ограничены на промежутке $[-1; 1]$ только тогда, когда $\mu = l(l+1)$, $l \geq 1$. Поэтому собственные значения μ_n за-

дачи (9) и, как это следует из (11), соответствующие им собственные функции $Q_n(r)$ являются многочленами

$$Q_n(r) = Q(0) \left(1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{(2m)!} (\mu_0 - \mu_n)(\mu_1 - \mu_n) \dots (\mu_{m-1} - \mu_n) r^{2m} \right). \quad (12)$$

Несложно проверить, что эти многочлены разных порядков ортогональны между собой на промежутке $[0; 1]$. Задача (9) – однородная. Значение нормировочного множителя $Q(0)$ мод собственных колебаний будет выбираться таким, чтобы амплитуда колебаний свободной поверхности при $x = a$ равнялась ζ_0 .

Особенности низших мод сейшевых колебаний.

1. Собственное значение первой моды $\mu_1 = 2$ ($k = 1$) и соответствующая собственная функция имеет вид $Q_1(r) = -(1 - r^2)/2$.

Частота и период первой моды собственных колебаний жидкости вычисляются следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2gh_0}}{a}, \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\sigma_1} = \frac{2\pi a}{\sqrt{2gh_0}} \approx \frac{4,44a}{\sqrt{gh_0}}. \quad (13)$$

Полученное выражение (13) для расчета периода τ_1 согласуется с формулой для периода фундаментальной моды в прямоугольном бассейне с параболическим профилем дна, приведенной в [2].

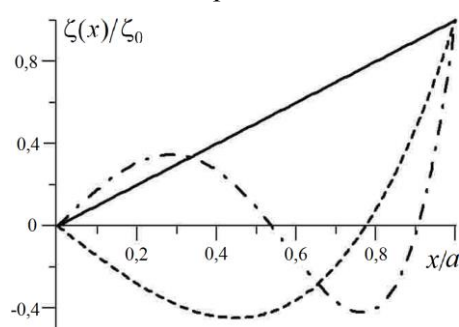
С использованием (8) находим выражение для расчета отклонения свободной поверхности с точностью до постоянного множителя

$$\zeta_1(x, t) = \zeta_0 (x/a) \cos \sigma_1 t. \quad (14)$$

Из первого уравнения системы (1) с учетом (13), (14)

$$u_1(x, t) = -\frac{g\zeta_0}{a\sigma} \sin \sigma_1 t = -\sqrt{\frac{g}{2h_0}} \zeta_0 \sin \sigma_1 t.$$

Данная мода является фундаментальной модой бухты (модой Гельмгольца) [2]. Узловых линий она внутри бухты не имеет. Горизонтальная составляющая скорости движения жидкости постоянна и меняет знак на противоположный каждые полпериода.



Р и с . 2 . Профиль свободной поверхности для первых трех мод для момента времени $t = 0$: $k = 1$ (—), $k = 2$ (- - -), $k = 3$ (- · - ·).

В результате полпериода вода «закачивается» в бухту, а следующие полпериода «выкачивается» из нее. Профиль волны в любой момент времени представляет собой прямую линию, проходящую через точку $x = 0$ (рис.2). Угол наклона этой линии к оси x является периодической по времени функцией с периодом τ_1 , определяемым формулой (13). Максимальные отклонения свободной поверхности имеют место на твердой границе бассейна $x = a$ (у берега). В такт колеба-

ниям свободной поверхности происходит горизонтальное движение жидкости. При этом его скорость u_1 не зависит от координаты x и достигает максимального значения в те моменты времени, когда свободная поверхность горизонтальна.

2. Собственное значение второй моды $\mu_2 = 12$ и соответствующая собственная функция имеет вид

$$Q_2(r) = \frac{1}{4} (1-r^2)(5r^2-1). \quad (15)$$

Выражения для частоты и периода собственных колебаний второй моды записываются так

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{12gh_0}}{a}, \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{\sigma_2} = \frac{\pi a}{\sqrt{3gh_0}}. \quad (16)$$

Отклонения свободной поверхности и скорость волнового течения будут вычисляться по формулам:

$$\begin{aligned} \zeta_2(x,t) &= \zeta_0 \frac{x}{2a} \left(5 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 3 \right) \cos \sigma_2 t, \\ u_2(x,t) &= \zeta_0 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3g}{h_0}} \left(1 - 5 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \sin \sigma_2 t. \end{aligned} \quad (17)$$

Анализ первого выражения (17) показывает, что отклонения свободной поверхности описывается кривой третьего порядка (рис.2). Внутри акватории будет расположена одна узловая линия, проходящая через точку с координатой $x = a\sqrt{3/5} \approx 0,77a$. Скорость волнового течения для данной моды зависит от пространственной координаты и изменяется по квадратичному закону.

3. Собственное значение третьей моды $\mu_3 = 30$ и соответствующая собственная функция имеет вид

$$\begin{aligned} Q_3(r) &= \frac{1}{16} (-1 + 15r^2 - 35r^4 + 21r^6) = \frac{1}{16} (1-r^2)(-1 + 14r^2 - 21r^4), \\ \sigma_3 &= \frac{\sqrt{30gh_0}}{a}, \quad \tau_3 = \frac{2\pi}{\sigma_3} = \frac{2\pi a}{\sqrt{30gh_0}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отклонения свободной поверхности и скорость волнового течения будут вычисляться по формулам:

$$\begin{aligned} \zeta_3(x,t) &= \zeta_0 \frac{x}{8a} \left(15 - 70 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 63 \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right) \cos \sigma_3 t, \\ u_3(x,t) &= \zeta_0 \frac{1}{16} \sqrt{\frac{30g}{h_0}} \left(-1 + 14 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 21 \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right) \sin \sigma_3 t. \end{aligned} \quad (19)$$

Функция отклонения свободной поверхности (19) представляет собой кривую пятого порядка (рис.2) и имеет в акватории бухты две узловые точки с коор-

Т а б л и ц а 1. Периоды (в минутах) продольных мод сейшевых колебаний, рассчитанные по аналитическим моделям с постоянной (I) и переменной (II) глубинами, а также по данным наблюдений (III).

мода, k	Севастопольская бухта (7000 км; 11,7 м; 20 м)			Холмская бухта (650 км; 6,5 м; 10 м)		
	I	II	III	I	II	III
1	43,8	36,7	50	5,4	4,9	8,0
2	16,6	15,0	–	1,8	2,0	3,0
3	8,8	9,5	–	1,1	1,3	1,5
4	6,3	6,9	–	0,8	0,9	0,9

мода, k	бухта Алексева (1600 км; 10 м; 15 м)			Петрозаводская губа (18000 км; 16 м; 25 м)		
	I	II	III	I	II	III
1	10,8	9,8	10,5	96	85	110
2	3,6	4,0	–	32	35	36
3	2,2	2,5	2,7	19	22	21
4	1,5	1,8	–	13	16	15

динатами $x_1 \approx 0,91a$; $x_2 \approx 0,54a$. Аналогично могут быть получены параметры любой требуемой моды.

Используя данные из табл.1, сравним значения периодов продольных мод сейшевых колебаний, рассчитанных по аналитическим формулам и полученных в результате обработки данных натуральных наблюдений.

В табл.1 колонки I представляют значения периодов первых мод для прямоугольных бассейнов постоянной глубины с открытым входом [5]; колонки II – для бассейнов переменной глубины, изменяющейся по параболическому закону (формулы (13), (16), (18)). В колонках III указаны значения периодов, полученных в результате обработки данных натуральных наблюдений в Севастопольской бухте [12], Холмской бухте [10], Петрозаводской губе Онежского озера [13], бухте Алексева [14]. В колонках с названием бухты или залива указаны значения параметров, использованных при расчетах: длина (км), средняя глубина (м), глубина у входа (м). Во всех четырех рассмотренных здесь реальных водоемах глубина увеличивается от кутовой части к входу.

Как показывает анализ данной таблицы, расчеты периодов мод Гельмгольца по формуле (13) дают заниженные величины по сравнению со значениями, рассчитанными для бассейна с постоянной глубиной, и данными наблюдений. Особенно велико расхождение с данными наблюдений для Севастопольской и Холмской бухт. Это связано с тем, что данные бухты включают в себя достаточно большие самостоятельные гавани (для Севастопольской бухты – это Южная бухта, для Холмской бухты – гавань, в которой осуществляется обработка железнодорожных паромов). Наличие таких гаваней

ней приводит к увеличению периода первой моды собственных колебаний [15]. Периоды более высокочастотных мод, рассчитанные по аналитическим моделям, достаточно хорошо согласуются друг с другом и с данными натурных наблюдений. При этом значения периодов, рассчитанные по модели с переменной глубиной, лучше согласуются с данными натурных наблюдений.

Рассмотрим применимость полученного в настоящей работе аналитического решения для оценки пространственной структуры сейшевых колебаний в реальных бухтах на примере бухты Алексеева, расположенной в северо-западной части о-ва Попова. Данная бухта представляет собой бассейн почти прямоугольной формы протяженностью около 1600 м, максимальной шириной около 600 м [14]. Широкий вход ориентирован в Амурский залив, глубины в кутовой части сравнительно небольшие (3 – 8 м), но резко увеличиваются по мере приближения к горловине и достигают 15 м. В [14] выполнено исследование резонансных колебаний в бухте Алексеева на основе анализа данных натурных наблюдений и математического моделирования с помощью программного комплекса *NAMI-DANCE*, предназначенного для моделирования цунами и являющегося модификацией известного японского кода *TUNAMI*. В качестве начального условия для модели задавалось положительное возвышение водной поверхности эллиптического типа, расположенное в центре Амурского залива с максимальной высотой 0,5 м. С использованием спектрального анализа результатов расчетов отклонений уровня в бухте были выделены два резонансных периода 10,5 мин и 2,5 мин. Наличие сейшевых колебаний с указанными периодами выявлено и по результатам обработки данных наблюдений в [14]. Также в [14] построено пространственное распределение средней амплитуды колебаний для резонансных периодов. Период 10,5 мин соответствует моде Гельмгольца бухты Алексеева. Данная мода не имеет узловых линий в акватории бухты. Узловая линия расположена в области входа в бухту. Данное пространственное распределение хорошо согласуется с профилем, представленным на рис.2 (при $k = 1$). Выделенный в [14] резонансный период 2,7 мин соответствует моде, которая имеет два хорошо выраженных максимума средней амплитуды. Наибольший из них расположен в кутовой части бухты, ближе к ее южному приглубому берегу, другой, более слабый, находится к северу от нее, в районе изгиба линии берега [14]. Это хорошо согласуется с профилем колебаний уровня для трехузловой продольной моды, построенным по аналитической модели (рис.2, $k = 3$).

Выводы.

1. Периоды собственных мод в прямоугольном бассейне с параболическим дном связаны законом: $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 : \dots = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} : \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} : \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 6}} : \frac{1}{\sqrt{7 \cdot 8}} \dots$. Они соотносятся с периодом первой моды следующим образом: 1 : 0,408 : 0,258 : 0,189 : ...

2. Значения периодов продольных сейш, рассчитанные по аналитической формуле, полученной для модельного бассейна с параболическим профилем дна, удовлетворительно согласуются с данными натурных наблюдений для бухт и заливов, у которых глубина увеличивается от кутовой части к входу. Исключение составляет период моды Гельмгольца, для которого получена заниженная оценка.

3. Профиль колебаний уровня для бухты Алексеева, построенный с помощью аналитической модели, дает удовлетворительное качественное совпадение с пространственной структурой, полученной с использованием численной модели *NAMI-DANCE*.

4. Амплитуды скоростей волновых течений продольных сейш зависят от номера моды в бассейнах с открытым входом и параболическим профилем дна. Известно, что для бассейнов постоянной глубины данные амплитуды не зависят от номера моды.

Работа выполнена в Морском гидрофизическом институте РАН в рамках государственного задания по теме 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лабзовский Н.А.* Непериодические колебания уровня моря.— Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1971.— 238 с.
2. *Rabinovich A.B.* Seiches and harbor oscillations (Chapter 9) // Handbook of Coastal and Ocean Engineering / Ed. By Y.C.Kim.— Singapoure: World Scientific Publ., 2009.— P.193-236.
3. *Shao D., Feng W., Feng X.* An analytical investigation for oscillations in a harbor of a parabolic bottom // J. Mar. Science and Techn.— 2016.— v.21, iss.3.— P.416-426.
4. *Зырянов В.Н., Чебанова М.К.* Гидродинамические эффекты при вхождении приливных волн в эстуарии // Водные ресурсы.— 2016.— т.43, № 4.— С.379-386.
5. *Манилюк Ю.В., Фомин В.В.* Сейшевые колебания в частично замкнутом бассейне // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.— 2017.— № 3.— С.73-83.
6. *Ivanov V.A., Manilyuk Yu.V., Sannikov V.F.* Seiches in a basin with an open entrance // J. Appl. Mech. and Techn. Phys.— 2018.— v.59, № 4.— P.594-600.
7. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика.— М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.— 560 с.
8. *Черкесов Л.В.* Основы динамики несжимаемой жидкости.— Киев: Наукова думка, 1984.— 167 с.
9. *Рабинович А.Б.* Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение.— СПб.: Гидрометеоздат, 1993.— 325 с.
10. *Ковалев Д.П.* Натурные эксперименты и мониторинг инфрагравитационных волн для диагностики опасных морских явлений в прибрежной зоне на примере акваторий Сахалино-Курильского региона: дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Южно-Сахалинск, 2015.— 304 с.
11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики.— М.: Изд-во МГУ, 1999.— 799 с.
12. *Горячкин Ю.Н., Иванов В.А., Репетин Л.Н., Хмара Т.В.* Сейши в Севастопольской бухте // Труды УкрНИГМИ.— 2002.— вып.250.— С.342-353.
13. *Манилюк Ю.В., Пальшин Н.И.* Резонансные колебания в Петрозаводской губе Онежского озера // XXVI междунар. научно-технич. конф. «Прикладные задачи математики». 17-21 сентября 2018 г.— Севастополь, 2018.— С.127-132.

14. *Шевченко Г.В., Чернов А.Г., Ковалев П.Д., Горин И.И.* Резонансные колебания в заливах и бухтах: натурные эксперименты и численное моделирование // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е.Алексеева.– 2010.– С.52-62.
15. *Manilyuk Yu.V., Cherkosov L.V.* The influence of the gulf's geometry on seiche oscillations in an enclosed basin // Physical oceanography.– 1997.– v.8, iss.4.– P.217-227.

Материал поступил в редакцию 18.04.2019 г.
После доработки 10.09.2019 г.

Yu.V.Manilyuk, V.F.Sannikov

RESEARCH OF SEICHE OSCILLATIONS IN THE BAY OF VARIABLE DEPTH

Within the framework of linear approximation of the long wave's theory, seiche oscillations are considered in a partially closed rectangular basin of variable depth varying according to a parabolic law. An analytical solution was obtained for the case when the node level line is located at the bay entrance. The periods, level fluctuations and seiche currents are investigated. Estimates of the periods of main seiches modes are obtained for the Sevastopol Bay, the Kholmokaya Bay, the Alekseev Bay, the Petrozavodsk Bay of the Onega Lake. It was revealed that analytical estimates of seiche periods in these reservoirs are in satisfactory agreement with the data of field observations and with the values calculated using the formulas for a basin with a constant depth. The exceptions are the periods of the Helmholtz mode, for which underestimated values are obtained.

KEYWORDS: seiches, partially closed pool, Helmholtz mode, the Sevastopol Bay, the Kholmokaya Bay, the Petrozavodskaya Bay