

А.Е.Щодро

*Морской гидрофизический институт РАН, г.Севастополь***РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РАСЧЕТА МЕСТНЫХ РАЗМЫВОВ
НЕСВЯЗНОГО ГРУНТА В ЗОНЕ ВЛИЯНИЯ РЕЧНЫХ
И МОРСКИХ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ
ВОДНОГО ПОТОКА И ТРАНСПОРТА НАНОСОВ**

Предложена новая концепция местного размыва русла у берегов рек и отдельных типов речных или морских сооружений. Предполагается, что наибольшие деформации связаны с деятельностью винтовых течений за донными грядами. Предложен ряд математических моделей для быстрого и эффективного расчета кинематических характеристик потока и деформаций русла. Данные модели могут быть использованы для экологических и гидротехнических оценок.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *стабилизация русла, местные размывы, лабораторные исследования, математическая модель взаимодействия потока и наносов, имитация отрыва частиц*

doi:10.22449/2413-5577-2018-2-74-87

Актуальность работы связана с тенденцией к дальнейшему возрастанию неравномерности стока и максимальных расходов равнинных и горных рек небывалыми наводнениями. Обследование объектов берегоукрепления горных рек показало, что их разрушения связаны, в основном, с местными размывами берегов, причем наиболее опасные из них возникают вследствие резкого приближения потока к берегу (свалов потока на берег).

Для прогноза возможных русловых деформаций следует рассмотреть модель взаимодействия потока, русла и наносов. В данной работе рассматриваются как типовой сценарий возникновения катастрофического размыва, так и три математические модели взаимодействия потока и русла.

Русловые деформации, характерные для рек различного типа, искусственных каналов, водохранилищ или морских прибрежных зон, можно классифицировать на глубинные и плановые. В работах [1 – 6] заложены основы расчетов, в основном, глубинных деформаций как последствий конвективно-массообменных явлений, происходящих в турбулентном потоке.

Физическая модель процессов размыва. Сценарий возникновения наиболее значительных размывов при этом представляется следующим образом. Насыщенные паводковые потоки вытекают из гор или движутся с вышерасположенных участков русла с большими скоростями, которые выносят значительные объемы наносов. На участках с меньшими уклонами они расширяются в пределах речной долины. Вследствие уменьшения скоростей начинается массовое осаждение наносов, образуются русловые формы – острова, гряды, побочни и другие. В особенности интенсивное осаждение наносов происходит в период спада паводка, когда существенно уменьшается транспортирующая способность потока.

© А.Е.Щодро, 2018

Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. 2018. вып.2. С.74-87.

При этом как в мелкопесчаных руслах, так и на горных реках, когда гидравлическая крупность грунта w по отношению к скорости потока U невелика ($w/U < 0,2$), наблюдается аналогичная картина: в руслах с поворотами значительной крутизны (то есть с отношением радиуса кривизны средней линии русла к его ширине $R/B < 2,0$) формируется наносный бар – крупная гряда, которая может быть причиной дальнейших переформирований (рис.2).

Ниже дано описание трёх экспериментальных установок для исследования общих закономерностей формирования катастрофических размывов:

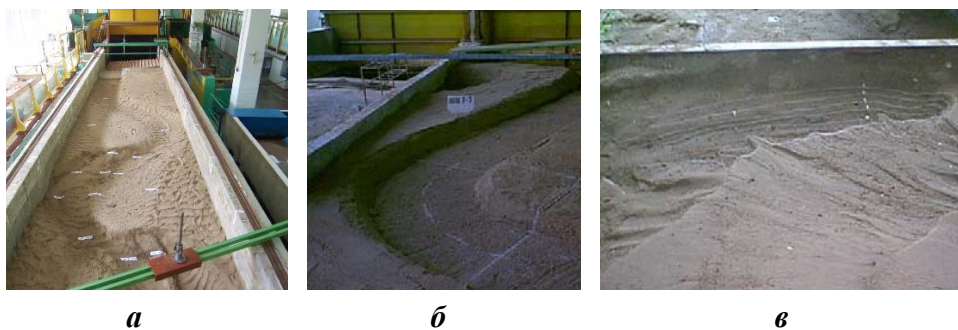
- в легко размываемых практически однородных грунтах;
- в условиях горных рек, сложенных крупными однородными несвязными наносами;
- при резком приближении потока к берегу (модель «свала» потока).

Для исследования качественных и количественных закономерностей переформирования русел в легко размываемых грунтах была создана экспериментальная модель с параметрами русла, характерными для рек в однородных мелкозернистых грунтах. В гидравлическом лотке длиной 15 м и шириной 2,5 м (рис.1, а) уложен мелкий, однородный песок, в котором перед началом опыта формировалось русло определенной конфигурации.

Эксперимент проводили следующим образом: русло заполнялось водой с низовой стороны и включался рабочий режим в течение 15 – 30 минут в соответствии с гидрографом паводка и принятым масштабом моделирования. По завершении эксперимента изучался рельеф песчаной поверхности русла.

Эксперименты показывают, что при прохождении потока в русле или в русле и по пойменной территории существенное влияние на деформации русла оказывают отложения наносов. Наибольшие размывы происходили у вогнутых берегов русловой части лотка. Продукты размыва формировали донные гряды, которые под влиянием течения приобретали косое расположение относительно транзитного потока. За такими грядами возникали винтообразные течения, существенно усиливающие размыв подножья берегового откоса.

Эксперименты, связанные с формированием катастрофических размывов в условиях горных рек, проводились в лотке (рис.1, б). Был воспроизведе-



Р и с . 1 . Гидравлические лотки для исследования переформирований мелкопесчаных однородных грунтов (а); крупнопесчаных (б); донная гряда у берега и размыв, созданный ею (в).

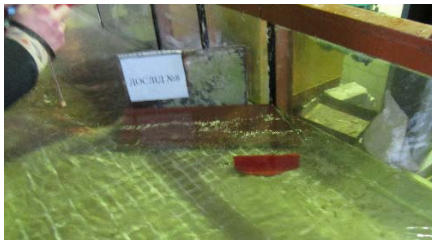
ден резкий поворот русла горной реки ($R/B = 1,0$) с воссозданием параметров русла, характерных в среднем для рек с максимально возможной крутизной. Кроме того, была организована подача насосов, максимальная по интенсивности, но находящаяся в пределах транспортирующей способности потока, определяемой экспериментально.

При значительной кривизне русла ($R/B \leq 1,5$) происходили явления, аналогичные описанным выше. При прохождении руслоформирующих расходов в этих руслах также образовывались донные гряды, которые смещались вниз по течению. То есть в русле формировалась гряда, которая смещалась вниз по течению и направлялась к повороту. Поворот, являясь сопротивлением, тормозил движение гряды, и она фиксировалась около начала поворота, со стороны вогнутого берега, а в противоположную сторону смещалась динамическая ось потока. Гребень гряды был примерно горизонтальным и ориентирован вниз по течению от вогнутого берега в начале поворота русла к выпуклому берегу (рис.1, в). При этом соотношение максимальных глубин размыва и высоты гряды оставалось примерно постоянным и практически не менялось при разной интенсивности подачи наносов и равнялось 3,5 – 4,0.

С целью проследить процесс формирования гряды перед откосом, к которому резко приближается динамическая ось потока, установить ее максимальную высоту и оценить глубину размыва, возникающего в его фокусе, то есть в начальной зоне винтообразного течения, была создана экспериментальная модель с параметрами русла, характерными для горных потоков. Для этой цели в зеркальном гидравлическом лотке специально было установлено препятствие, которое моделировало участок навалного берега, расположенного под углом 45° к направлению самого транзитного потока. Этот участок берега имел коэффициент заложения откоса один к одному и стеснял весь поток в лотке на $1/3$ его ширины. В жестких границах такого лотка – без подачи наносов – изучалась кинематика потока. Затем пропускали наносы, и наблюдалось формирование крупной донной гряды перед препятствием – береговым откосом.

Установлено, что в начале берегового участка, ближе к правой стенке лотка, придонные скорости существенно увеличивались. Результатом их увеличения был смыв наносов со дна в зоне перед береговым откосом. Это было связано, прежде всего, с зарождением винтообразного течения в пределах донной области потока перед берегом. Оно развивается от стенки лотка в сторону транзитного потока и имеет горизонтальную компоненту скорости, направленную вдоль берега. Интенсивность этого вдольберегового винтообразного течения существенно возросла при установке препятствия (вертикальной пластины, расположенной параллельно берегу на некотором расстоянии от него). Особенно она возросла перед берегом, в начальной зоне этого течения (рис.2, а). Устанавливаемая пластина имела небольшую высоту, равную 0,3 – 0,5 от глубины потока h и длину, равную двум – трем ее высотам. Эта пластина моделировала донную гряду перед берегом.

На этой установке также проводились опыты с пуском наносов. Количество подаваемых наносов определялось максимальной транспортирующей способностью потока. Механический состав был смоделирован по



а



б

Р и с. 2. Картина натекания потока на береговой откос под углом 45° . Донный порог, представленный на фотографии, имитирует воздействие донной гряды (*а*); отложения наносов перед берегом (*б*).

правилу геометрического подобия, отвечающему масштабу моделирования 20 – 25. Картина донных отложений вблизи берега свидетельствует о том, что наносы образуют донную гряду, размеры которой сначала увеличиваются во времени, а затем она стабилизируется. Максимальная высота стабилизированной гряды составляет примерно $1/2 - 1/3$ часть глубины потока. Весь опыт продолжается 10 – 15 минут.

Таким образом, в типичном сценарии «свала» потока отмечается, что потоки, натекающие на препятствия, отклоняются к берегу, производят его размыв, и сами, формируя русло с закруглением у берега, еще больше размывают противоположный вогнутый берег. При начале спада паводка, кроме того, из переносимых потоком наносов формируются крупные донные косорасположенные гряды, за которыми формируется устойчивые винтообразные течения, существенно усиливающие размыв.

Математические модели взаимодействия потока и русла построены на основе поэтапного учета многих действующих факторов. Применительно к рассмотренному сценарию в первой части теоретических исследований строится математическая модель пространственного стационарного течения в зоне винтообразного потока, позволяющая описать формирование кинематической структуры потока, и, в частности, – винтообразного течения за донной грядой. При этом рассматривается стационарная задача о распределении кинематических характеристик потока. Знание осредненных скоростей, а также их градиентов в придонной области необходимо с целью определения касательных напряжений. Эта модель имеет методическое значение и служит для получения связи между касательными напряжениями и другими динамическими и кинематическими характеристиками потока с его размывающей способностью именно в зоне наибольшего размыва, – там, где функционируют винтообразные течения. Модель также позволяет определить параметры турбулентности и донные касательные напряжения, ответственные за размыв и транспорт донных наносов в условиях формирования наиболее значительных деформаций русла.

В теоретической части исследования рассматриваются две модели взаимодействия потока и русла. Первая модель описывает процесс размыва как результат конвективно-массообменных явлений, происходящих на границе между подвижным дном и текущим потоком, и позволяет произвести расчет массового смыва грунта с поверхности дна, а также его перенос и отложение в другом месте. С помощью второй модели изучается стохастический

процесс отрыва отдельных частиц, она применима, в основном, для разнородных грунтов, размыв которых происходит при учете влияния нескольких факторов – мгновенных скоростей турбулентного потока, формы и размера частиц и других характеристик.

На первом этапе использовалась система динамических уравнений О.Рейнольдса и неразрывности, замыкаемая уравнениями стандартной $k - \varepsilon$ модели турбулентности – переноса энергии турбулентности k и скорости ее диссипации ε :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} + w \frac{\partial k}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma_T}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\gamma_T}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma_T}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P_h - \varepsilon + P_{k\gamma}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma_T}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\gamma_T}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma_T}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + c_1 \frac{\varepsilon}{k} P_h - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + P_{\varepsilon\gamma}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\overline{u'_i u'_j} = \gamma_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \cdot \delta_{ij}. \quad (5)$$

При этом значения турбулентных напряжений, входящих в правую часть уравнений (1), расписываются согласно градиентной гипотезе (5); коэффициент γ_T – кинематическая вязкость потока, определяемая состоянием турбулентности, может сильно зависеть как от координаты точки потока, так и от состояния самого потока, а также и от его истории.

В уравнениях (1) – (5) введены следующие обозначения: X – проекции массовых сил; δ_{ij} – символ Кронекера; $k = 1/2 (u'^2 + v'^2 + w'^2)$ – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации турбулентной энергии. Величины P_h , $P_{k\gamma}$, $P_{\varepsilon\gamma}$ с коэффициентами c_1 и c_2 характеризуют компоненты генерации турбулентной энергии [2, 3, 8].

Начальные и граничные условия для проведения численных расчетов задавались в соответствии с гипотезой о прилипанию жидких частиц к твердой поверхности.

Важной задачей при построении модели турбулентности является задание функции γ_T . В данном исследовании принята зависимость для коэффициент турбулентной вязкости, выражаемого через значения k и ε следующим образом:

$$\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon;$$

где $C_\mu = 0,03 - 0,05$ – коэффициент, определенный из сравнения результатов численных и физических экспериментов, выполненных автором, зависящий от соотношения генерационного и диссипативного членов в уравнениях модели [1].

Система уравнений (1) – (5) решалась комбинацией методов:

- расчета скоростей по неявной схеме на грубой равномерной сетке, на основе неявной схемы с использованием простейших моделей турбулентности;
- корректировки продольного распределения давлений на основе интегрального условия неразрывности;
- пересчета скоростей;
- последующего сплайнового сглаживания результатов и одновременного сгущения сетки;
- подключения схемы расщепления по трем пространственным направлениям, на основе полной $k - \varepsilon$ модели турбулентности [1 – 3] с ее численной реализацией на ЭВМ до момента установления.

Соответственно этим пунктам далее описаны этапы алгоритма.

Подробнее о решении системы уравнений (1) – (5) дается также информация в работе [3].

На первом этапе этого алгоритма вводится модель турбулентности, которая принимается для замыкания системы модельных уравнений, сначала она может быть простой. Например, $\nu_T = \text{const}$ по области интегрирования. Этот коэффициент обычно принимается прямо пропорциональным высоте области винтообразного течения и скорости набегающего потока в соответствии с экспериментами И.Л.Розовского по его формуле [3].

$$\nu_T = 0,05 u_0 \sigma,$$

где u_0 – средняя начальная скорость, σ – высота донной гряды.

Основная цель этого этапа – охватить всю область единственным расчетом и достичь сходимости алгоритма в целом. Отметим, что именно неявная схема является абсолютно сходящейся.

Систему уравнений (1) запишем в следующем виде (на примере 1-го уравнения этой системы):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (6)$$

где u, v, w – поле скоростей; X, Y, Z – массовые силы вдоль осей OX, OY, OZ соответственно; ρ – плотность воды – известная постоянная или переменная по области при заданной температуре и солености; P – известное во всей области поле давления; γ – турбулентная вязкость.

Значения скоростей u, v, w считаются заранее известными по всей расчетной области, включая значения на границах Γ области. Они задаются в конечно разностном аналоге уравнения (6) и его граничных условиях (7) на основании данных экспериментов, проведенных предварительно автором [1, 7], или могут быть откорректированы, исходя из опыта гидравлических экспериментов с такими течениями. Этот шаг является реализацией известного метода линеаризации.

Граничные условия запишем так:

$$u|_{\Gamma} = \overset{\circ}{u}|_{\Gamma}, \quad v|_{\Gamma} = \overset{\circ}{v}|_{\Gamma}, \quad w|_{\Gamma} = \overset{\circ}{w}|_{\Gamma}. \quad (7)$$

Выполним построение разностных аналогов уравнений динамики жидкости. На пространственной области в виде параллелограмма с известными значениями высоты L , ширины M и длины N введем сетку:

$$\omega_{\Delta X, \Delta Y, \Delta Z} = \omega_{\Delta X} \times \omega_{\Delta Y} \times \omega_{\Delta Z}, \quad \text{где } \omega_{\Delta X} = \left\{ i \cdot \Delta X : i = \overline{0, n}; \Delta X = \frac{N}{n} \right\}, \quad (8)$$

$\omega_{\Delta Y}$ и $\omega_{\Delta Z}$ представляются аналогично.

Система дифференциальных уравнений (6) – (7) решается с помощью метода конечных разностей [3] на разреженной равномерной сетке:

$$G = \left\{ (x_i, y_j, z_k) : x_i = i \cdot \Delta x, y_j = j \cdot \Delta y, z_k = k \cdot \Delta z, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}, k = \overline{0, \gamma} \right\}$$

где $\Delta x = N/n$, $\Delta y = M/m$, $\Delta z = K/l$ – расстояние между узлами сетки соответственно по координатам x , y , z ; N , M , K – длина, ширина и высота исследуемой области; n , m , γ – количество узлов по длине, по ширине и по высоте сетки.

Разностный аналог системы дифференциальных уравнений (1) записывается в форме следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j,k} \left(\frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) - u_{i-1,j,k} \left(\frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) + u_{i,j+1,k} \left(\frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} \right) - \\ & - u_{i,j-1,k} \left(\frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + u_{i,j,k+1} \left(\frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} - \frac{1}{\Delta z^2} \right) - u_{i,j,k-1} \left(\frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \\ & + u_{i,j,k} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) = \frac{X_{i,j,k}}{v_t} - \frac{p_{i+1,j,k} - p_{i-1,j,k}}{2\Delta x v_t \rho}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & v_{i+1,j,k} \left(\frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) - v_{i-1,j,k} \left(\frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) + v_{i,j+1,k} \left(\frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} \right) - \\ & - v_{i,j-1,k} \left(\frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + v_{i,j,k+1} \left(\frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} - \frac{1}{\Delta z^2} \right) - v_{i,j,k-1} \left(\frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \\ & + v_{i,j,k} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) = \frac{Y_{i,j,k}}{v_t} - \frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j-1,k}}{2\Delta y v_t \rho}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & w_{i+1,j,k} \left(\frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) - w_{i-1,j,k} \left(\frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) + w_{i,j+1,k} \left(\frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} \right) - \\ & - w_{i,j-1,k} \left(\frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + w_{i,j,k+1} \left(\frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} - \frac{1}{\Delta z^2} \right) - w_{i,j,k-1} \left(\frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \\ & + w_{i,j,k} \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) = \frac{Z_{i,j,k}}{v_t} - \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k-1}}{2\Delta z v_t \rho}. \end{aligned} \quad (11)$$

Переменные с «тильдой» соответствуют задаваемым значениям компонент вектора скорости в каждой узловой точке расчетной области; $X_{i,j,k}$, $Y_{i,j,k}$, $Z_{i,j,k}$ – компоненты массовых сил; ν_i – кинематический коэффициент турбулентной вязкости, принимаемый в первом приближении постоянной величиной; p – гидродинамическое давление.

Такую систему решаем одним из более экономичных известных способов – LU -алгоритмом.

На втором этапе алгоритма для ускорения расчетов и улучшения сходимости алгоритма определяется полный перепад давлений на всей области путем удовлетворения интегральному условию неразрывности по всей области

$$\left| \iint_{(S_i)} U(y, z) dydz - \iint_{(S_{i-1})} U(y, z) dydz \right| \leq \varepsilon |Q_i - Q_{i-1}|, \quad (12)$$

где $U(y, z)$ – поле скорости в поперечном сечении расчетной области; Q_i – расход в i -ом сечении; ε – константа, которая обеспечивает уровень точности приближенного вычисления поля давления ($\varepsilon = 0,0001$), которая множится на абсолютную величину разности расходов поступательного движения потока в рассматриваемой области винтообразного течения в двух ее соседних сечениях.

Определение общего перепада давления, приближенно задаваемого из эксперимента, производится, исходя из внешних гидравлических условий обтекания рассматриваемой области. Например, имеются эмпирические сведения о перепадах давления, замеренные в лабораторных условиях при обтекании донного уступа в прямолинейном лотке спокойным потоком [1, 7]. Предварительное определение этого перепада позволяет ускорить алгоритм расчета, обеспечить его быструю сходимость и устойчивость.

На третьем этапе алгоритма корректируется поле давлений с помощью известного уравнения Пуассона для поля осредненного давления [1 – 3]. Оно получено путем применения операции дивергенции к системе уравнений динамики (1) с учетом неразрывности (2).

Для нахождения численного решения этого уравнения предлагается использовать итерационный метод последовательной верхней релаксации (ПВР) [2], который позволяет значительно уменьшить число итераций по сравнению с обычными итерационными схемами. Расчетные зависимости для определения значения величины давления во внутреннем узле расчетной области в случае использования метода ПВР имеют вид

$$p_{ijk}^{\tau+1} = \frac{\lambda}{2(\Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta z^2)} \left(\Delta y^2 \Delta z^2 (p_{i+1,jk}^{\tau} + p_{i-1,jk}^{\tau+1}) + \right. \quad (13)$$

$$\left. + \Delta x^2 \Delta z^2 (p_{ij+1,k}^{\tau} + p_{ij-1,k}^{\tau+1}) + \Delta x^2 \Delta y^2 (p_{ijk+1}^{\tau} + p_{ijk-1}^{\tau+1}) - \Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2 F_{ijk} \right) + (1 - \lambda) p_{ijk}^{\tau},$$

где λ – коэффициент релаксации; F_{ijk} – разностный аналог кинематической функции, которая находится в правой части уравнения (13); τ – номер итерации.

Идея сплайнового сглаживания результатов реализуется на четвертом этапе алгоритма. Для того чтобы избежать больших затрат машинных ре-

сурсов и повысить точность вычисления, возникла идея решать задачу расчета турбулентного водного потока по неявной схеме на укрупненной расчетной сетке, а затем осуществлять сгущение сетки за счет сплайновой аппроксимации найденных распределений проекций осредненных во времени скоростей на направления координатных осей u_z , v_z , w_z и соответствующего поля давления $P(x, y, z)$.

В результате получают более подробные поля скоростей и давлений, отображенные на сгущенной сетке. Далее кинематические характеристики течения уточняются с помощью явной схемы расщепления Мак-Кормака. Аппроксимация найденных неявным алгоритмом скоростей u , v , w и P осуществляется за счет интерполяции кубическими сплайнами, полиномами вида:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3. \quad (14)$$

Именно такие сплайны, принятые в работе, имеют наиболее экономичный вид, т.е. содержат минимально необходимое количество членов. Они же использовались для определения значений аппроксимированной функции в центре ребер, граней и в центре каждой элементарной ячейки сетки (рис.3).

Расчет и анализ кинематических и динамических характеристик потока в отрывной области за донным косорасположенным относительно потока уступом (рис.4, 5) и, аналогично, в ямах размыва были проведены с использованием описанной методики. Течение за уступом при этом моделирует естественные физические процессы за донными грядами. При наличии препятствия за уступом (у стенки, со стороны начальной зоны винтообразного течения, рис.5, б) появляется возможность, изменяя величину выступа препятствия, управлять скоростями течения за уступом.

Далее, на втором этапе теоретических исследований рассматривались задачи расчета полей мутности, а также интенсивностей смыва донных отложений (модель массового смыва мелкого, практически однородного грунта).

Для реализации этой математической модели нами предлагается новая идея – записать и решить единую систему уравнений, описывающих как

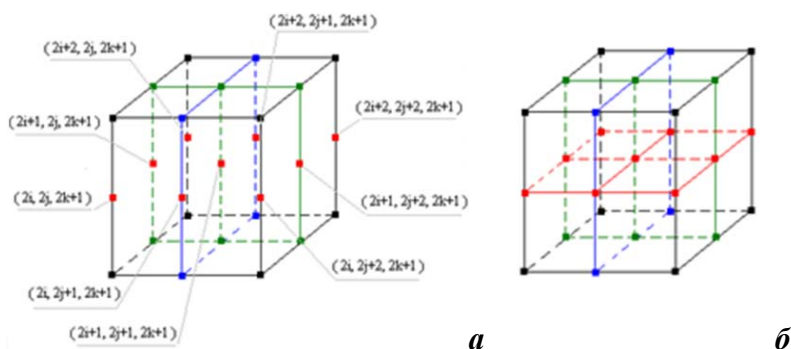
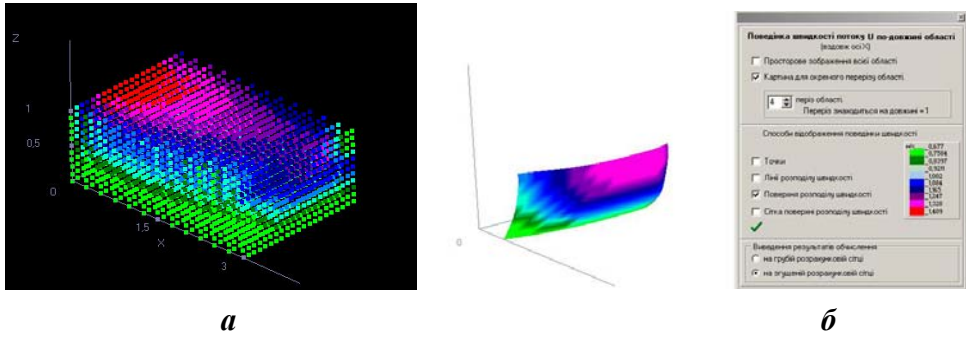


Рис. 3. Этапы последовательного определения значений аппроксимированной функции в центре ребер, граней, и в центре ячейки. На схемах (а, б) показаны разные пути осреднения узловых характеристик.



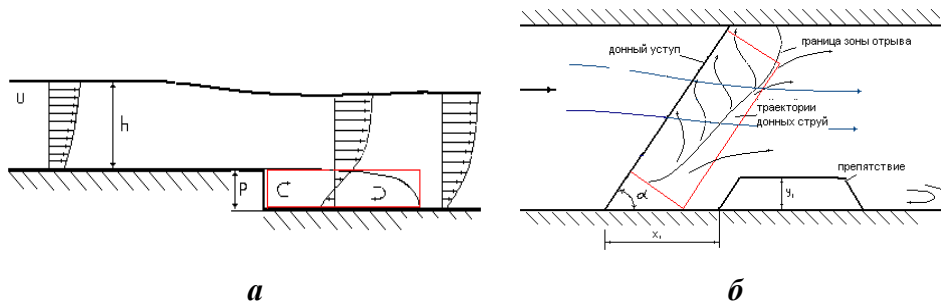
Р и с . 4. Трехмерная расчётная картина течений (скоростей U) по области при скорректированном поле давлений, угол установки уступа $\alpha = 45^\circ$, относительная высота $\delta = 0,33$ (а), распределение скоростей U в четвертом сечении области ($i = 4$) (б).

процессы переноса, так и процессы отрыва и отложения частиц грунта достаточно однородных фракций. Это позволяет получить 3-D картину размывов у сооружения для расчета процесса деформации дна – размыва или отложения наносов (рис.6, а). Для этого вдоль линий тока основного потока производится расчет как для плоских сечений.

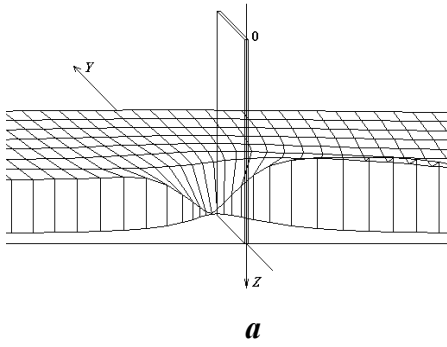
В основу дальнейших расчетов положено диффузионное уравнение, предложенное В.М.Маккавеевым для описания распределения взвешенных частиц в потоке, а также уравнение баланса наносов у дна. Рассматривается трехмерная модельная задача в области, ограниченной горизонтальной плоскостью $z = 0$ (поверхностью жидкости) и некоторой свободной поверхностью $L: z = l(x, y, t)$ – границей раздела жидкости и дна:

Считается при этом, что подъем твердых частиц со дна является следствием диффузионного процесса проникновения в поток твердого материала, который лежит на дне, через некоторую горизонтальную поверхность и определяется коэффициент диффузии $\varepsilon D(x, y)$. Перенос частиц от места их подъема представляет собою конвекцию, которая тоже учитывается в уравнении баланса твердых частиц, также учитывается баланс твердого материала, который привносится с потоком из вышерасположенных участков русла.

Вследствие массопереноса донных частиц через линию L (поверхность дна), ее вид со временем меняется [4, 5]. Процесс деформации русла, таким образом, может быть описан следующей модельной задачей



Р и с . 5. Схема движения потока в отрывной области за донным уступом и расчетной области: разрез (а); план (б).



Р и с . 6 . Компьютерный расчет деформации речного ложа возле полузапруды (а); система низких затопляемых полузапруд на вогнутом берегу карпатской реки для борьбы со свальными течениями и размывами. Видно занесение межполузапрудных пространств гравийными отложениями (б).

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(D(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} \right) - u(x, y) \frac{\partial c}{\partial x} - v(x, y) \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (15)$$

$$c(x, y, 0) = \bar{c}(x, y), \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad c|_{y=l(x,t)} = c_*, \quad (16)$$

где $c(x, y, t)$ – концентрация наносов (диффундирующих частиц) в точке (x, y) в момент времени t ; $\varepsilon D(x, y)$ – фиктивный «коэффициент диффузии», ε – малый параметр; $l(x, t)$ – функция положения поверхности дна в данный момент времени, $l(y, t) > 0$. Для определения фиктивного коэффициента диффузии D предлагается обобщенная формула:

$$D = \chi \lambda^{\mu V + \beta \frac{\partial V}{\partial \varphi}}, \quad (17)$$

где $\chi, \lambda, \mu, \beta$ – некоторые числа.

Решение задачи (15) – (16) проводится путем дискретизации времени t со столь малым шагом Δt , чтобы на каждом из промежутков $[t_k, t_{k+1}]$ можно было бы пренебречь изменением границы L считать ее при $t_k < t < t_{k+1}$ фиксированной: $L = L_k = \{(x, y): y = l(x, t_k)\}$. Но отметим, что данные интервалы не связаны с большими или меньшими временными интервалами, которые применяются для расчетов нестационарного движения потока в целом. Величины l учитываются при этом от квазигоризонтальной поверхности потока в вертикальном направлении до дна.

$$\left(\varepsilon D(V(l(c(x, z, t)))) \frac{\partial c}{\partial n} - (V_n(l(c(x, z, t))) + w_{0n}) c \right) \Big|_{z=l(x,t)} = c_* \frac{dl}{dt};$$

$$l(x, 0) = \tilde{l}(x), \quad (18)$$

где w_0 – скорость оседания частиц в стоячей воде; n – единичный вектор нормали к границе области, ориентированный в ее середину; ε – малый па-

раметр; c_* – концентрация твердых частиц на дне потока.

В описанной постановке задачи уравнение (18) представляет собой условие баланса твердого материала на границе потока и позволяет определить интенсивность изменения вертикальных размеров (глубин) потока. Оно может быть представлено в конечно-разностной форме

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{l_0^2}{l_{ik}^2} \frac{D_{ij+1,k} c_{ij+1,k} - (D_{ij+1,k} + D_{ijk}) c_{ijk} + D_{ijk} c_{ij-1,k}}{\Delta r^2} - u_{ijk} \frac{c_{ijk} - c_{i-1,jk}}{\Delta s} - \frac{l_0 w_0}{l_{ik}} \times \\ & \times \frac{c_{ijk} - c_{ij-1,k}}{\Delta r} = \frac{c_{ijk} - c_{ik-1}}{\Delta t}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$c_{i,j,0} = \bar{c}_{ij}; \quad c_{i,0,k} = 0; \quad c_{i,M,k} = c_*; \quad l_{i,0} = \tilde{l}_i.$$

Данная модель учитывает условия баланса на криволинейной и слабо деформированной поверхности дна. С учетом этого фактора уравнения (19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon D(s,r,t) \frac{1}{\sqrt{1+l'^2(s,t)}} \left(l'(s,t) \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0 (1+l'^2(s,t))}{l(s,t)} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{(w(s,t) - u(s,t) l'(s,t))}{\sqrt{1+l'^2(s,t)}} c \right) \Big|_{z=l(s,t)} = c_* \frac{dl(s,t)}{dt}. \end{aligned} \quad (20)$$

Задача (19) – (20) решается так:

$$\begin{aligned} l_{i,k+1} = l_{ik} + \frac{\Delta t}{c_*} & \left(\varepsilon D_{ijk} \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta s^2 + (l_{i+1,k} - l_{ik})^2}} \left(\frac{l_{i+1,k} - l_{ik}}{\Delta s} \cdot \frac{c_{i+1,jk+1} - c_{ijk+1}}{\Delta s} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{l_0}{l_{ik}} \cdot \frac{c_{ij+1,k+1} - c_{ijk+1}}{\Delta r} \right) - \frac{(\Delta s \cdot w_{ijk} - u_{ijk} (l_{i+1,k} - l_{ik}))}{\sqrt{\Delta s^2 + (l_{i+1,k} - l_{ik})^2}} c_{ijk+1} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь приняты такие обозначения:

$$\begin{aligned} c_{ijk} &= c(s_i, r_j, t_k); \quad D_{ijk} = D(s_i, r_j, t_k); \quad u_{ijk} = u(s_i, r_j, t_k); \quad \bar{c}_{ij} = \bar{c}(s_i, r_j); \\ l_{ik} &= l(s_i, t_k); \quad \tilde{l}_i = \tilde{l}(s_i), \quad s_i = \Delta s \cdot i, \quad i = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \\ r_j &= \Delta r \cdot j, \quad j = 0, M; \quad t_k = \Delta t \cdot k, \quad k = 0; 1; 2; \dots \end{aligned}$$

Система (20) – (21) решается по явной схеме и дает конфигурацию деформированного дна.

В работе рассматривается и анализируется также имитационная статистическая модель отрыва отдельных зерен несвязного разнородного крупнозернистого грунта, позволяющая рассчитать вероятность отрыва, характер и путь движения одиночной наносной частицы, лежащей в начальный момент времени на дне потока. Эта модель позволяет теоретически, с помощью имитационного моделирования, определять критические значения неразмывающихся скоростей, соответствующих определенной вероятности отрыва частицы за данный промежуток времени, а также проследить осредненные траектории частицы заданного диаметра. Модель описана в работе [6].

Особенность модели в том, что используется генератор случайных чисел, который задает значение диаметра частиц и нагрузки, действующие на них со стороны потока в соответствии со статистикой состава наносов и пульсации донных скоростей. Производится множество испытаний перебором значений диаметра частиц и действующих скоростей; анализируется равновесие каждой донной частицы на протяжении 1 с. На каждом расчетном интервале проверяются три условия отрыва частицы: 1) вертикальный подъем частицы; 2) полное выкатывание из гнезда; 3) отрыв во время выкатывания с учетом инерционных сил.

Суммируется количество оторвавшихся частиц за расчетный период времени (1 с). Причем выясняется, сколько выкатилось частиц из гнезда и сколько оторвалось в начале или в процессе их подъема, так как от характера отрыва частицы зависит ее дальнейшее движение. Условия выкатывания частицы при этом проверяется с помощью решения дифференциального уравнения движения частицы вокруг неподвижной точки с учетом действия вертикальных и горизонтальных сил со стороны потока и присоединенной массы частицы. Для горных рек указанная модель используется для расчета местного размыва с образованием самоотмостки.

Выводы. В данной работе предложена новая концепция местного размыва речного ложа, позволяющая определять параметры размывов, отвечающие их натурным значениям. Предложенная новая концепция подкреплена соответствующими математическими моделями и алгоритмами.

На основе ее разработаны практические рекомендации [8].

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schodro A.E.* River bed deformations near banks and hydraulic structures due to river flow // *WIT Transactions on Ecology and the Environment*.– 2007.– v.104.– P.381-387.
2. *Савенко В.Я.* Математические модели и методы расчета квазитрехмерных безнапорных потоков.– Киев: Техніка, 1995.– 188 с.
3. *Ходневич Я.В.* Математичне моделювання просторових течій з врахуванням інтегральної умови нерозривності // *Збірник наукових праць «Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво»*.– Рівне: Національний університет водного господарства та природо користування, 2007 .– вип.31.– С.287-292.
4. *Бомба А.Я., Щодро О.Є., Барановський С.В.* Про моделювання і дослідження сингулярно збурених дифузійних процесів в контрастних середовищах // *Волинський математичний вісник*.– 1996.– вип.2.– С.25-27.
5. *Барановський С.В.* Про математичне моделювання процесів деформації незв'язного піщаного дна біля окремих типів гідротехнічних споруд // *Вісник Тернопільського державного технічного університету*.– 1999.– т.4, № 2.– С.36-40.
6. *Schodro A.E.* Mathematical modeling of the single bottom particle stability // *Науково-технічний збірник НТУ*. Автомобільні дороги і дорожнє будівництво.– Киев, 2004.– вип.71.– С.206-215.

7. *Щодро А.Е.* Кинематика потока и водообмен за косорасположенными донными уступами гидротехнических сооружений // Гидравлика и гидротехника. Респ. межвед. научно-техн. сборник.– Киев: Техніка, 1978.– вып.26.– С.59-64.
8. *Савенко В.Я., Славинская Е.С., Щодро А.Е.* Методика розрахунку розмивів дна та берегів передгірських ділянок річок та місцевих розмивів біля річкових гідротехнічних споруд. МРР 218-02070915-231-2003.– Киев: Укравтодор, 2004.– С.58.

Матеріал поступил в редакцію 12.02.2018 г.
После доработки 3.05.2018 г.

A. E. Shchodro

PREPARATION OF METHODS FOR ASSIMILATION
OF LOCAL UNDERCUTTING OF COHESIONLESS SOIL UNDER
THE INFLUENCE OF RIVER AND MARINE CONSTRUCTIONS
IN CONSIDERATION OF WATER FLOW AND SEDIMENT TRANSPORT

A new conception of local erosion of riverbeds near the river banks and certain types of river or sea structures is proposed. It is assumed that the greatest deformations are due to the activity of the screw currents behind the bottom ridges. A number of mathematical models have also been proposed for the rapid and effective calculation of the kinematic characteristics of the flow and deformations of the bed. The models can be used for environmental and hydro-technical assessments.

KEYWORDS: stabilization of river-bed, local scours, laboratory research, mathematical model of flow and sediment interaction, simulation of particle separation