

В.С.Кочергин, С.В.Кочергин

*Морской гидрофизический институт РАН, г.Севастополь***РЕАЛИЗАЦИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО ВАРИАЦИОННОГО АЛГОРИТМА АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В АЗОВСКОМ МОРЕ**

Предложена численная реализация модифицированного вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений в модели переноса пассивной примеси для акватории Азовского моря. Для решения задачи идентификации начальных данных также используется стандартная вариационная процедура. Полученные результаты сравниваются между собой. В ходе численных экспериментов получено существенное уменьшение используемого процессорного времени при реализации предложенного алгоритма ассимиляции данных измерений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *модифицированный вариационный алгоритм, ассимиляция, сопряженная задача, Азовское море*

doi:10.22449/2413-5577-2018-2-66-73

**Введение.** Возрастающая антропогенная нагрузка на акваторию Азовского моря требует создания систем экологического мониторинга окружающей среды. Для реализации таких систем требуется не только современные математические модели динамических процессов, но и модели распространения загрязняющих веществ. Такие модели нуждаются в разработке специальных методов и алгоритмов усвоения данных измерений. Одним из подходов, реализующих ассимиляцию данных измерений за счет идентификации входных параметров модели, является вариационный алгоритм [1], основанный на минимизации квадратичного функционала качества прогноза и решении сопряженных задач. При численной реализации такого подхода возникает необходимость итераций, которые требуют больших объемов вычислений. Поэтому применение многопроцессорных систем может дать дополнительное преимущество. Выбор методов и построение алгоритмов реализации параллельных вычислений является достаточно сложной задачей. В данной работе при реализации вариационного подхода для этих целей используется метод оценки [2], основанный на методе сопряженных уравнений [3].

**Метод сопряженных уравнений, формула оценки.** Рассмотрим модель переноса пассивной примеси [4 – 6] в  $\sigma$ -координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + LC = 0 \quad (1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

© В.С.Кочергин, С.В.Кочергин, 2018

*Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. 2018. вып.2. С.66-73.*

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\sigma = 0: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \quad (3)$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (4)$$

где  $L = \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} K \frac{\partial D}{\partial \sigma}$ ,  $t \in [0, T]$  – время;

$C$  – концентрация примеси;  $D$  – динамическая глубина;  $A_H$  и  $K$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно;  $U, V, W$  – компоненты поля скорости;  $n$  – нормаль к боковой границе,  $\Gamma$  – граница области  $M$ ;  $M_t = M \times [0, T]$ .

В соответствие сопряженной задаче (1) – (4) поставим сопряженную задачу:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} + L^* C^* = 0, \quad (5)$$

$$\Gamma: \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0: \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1: \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (6)$$

$$t = T: C^* = h, \quad (7)$$

где  $L^*$  – формально сопряженный оператор оператору  $L$ .

Умножая уравнение модели (1) – (4) на  $C^*$  и интегрируя по частям, с учетом краевых условий, аналога уравнения неразрывности и (5) – (7) получим

$$\int_M h C_T dM = \int_M C_0 C_0^* dM. \quad (8)$$

Выбирая  $h$  в виде

$$h = \begin{cases} \frac{1}{m(\Omega)} & \text{в области } \Omega, \\ 0 & \text{вне области } \Omega, \end{cases} \quad (9)$$

где  $m$  – мера некоторой области  $\Omega \in M$ . В левой части выражения (8) получаем среднюю концентрацию  $\bar{C}_T$  в  $\Omega$  на конечный момент времени  $T$ .

Выберем в качестве  $\Omega$  ячейку расчетной сетки. Тогда имеем

$$\bar{C}_T = \int_M C_0 C_0^* dM. \quad (10)$$

Следовательно, используя решение сопряженной задачи (5) – (7), по формуле (10) можно оценивать концентрацию примеси в заданной ячейке. Численные эксперименты, проведенные в работах [2, 6], показали хорошую точность воспроизведения поля концентрации по начальным данным.

**Вариационный алгоритм ассимиляции.** Задача усвоения данных измерений производится за счет идентификации начального поля концентрации на основе минимизации квадратичного функционала качества прогноза

$$I_0 = \frac{1}{2} \left( P \left( RC_T - C_T^{uzm} \right), P \left( RC_T - C_T^{uzm} \right) \right)_M, \quad (11)$$

где  $P$  – оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений,  $R$  – оператор проектирования в точки наблюдений. Следуя [6], имеем:

$$I = I_0 + \left( \frac{\partial C}{\partial t} + LC, \lambda^* \right)_{M_t} + \left( \frac{\partial C}{\partial n}, \lambda^* \right)_{\Gamma_t} + \left( C - C_0, \lambda^* \right)_M + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma}, \lambda^* \right)_{\sigma_t^0} + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma}, \lambda^* \right)_{\sigma_t^{-1}}, \quad (12)$$

где скалярное произведение определяется стандартным образом. Запишем вариацию функционала (12) и проинтегрируем соответствующее выражение по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности. Выбрав в качестве множителей Лагранжа решение следующей задачи:

$$-\frac{\partial D\lambda^*}{\partial t} + L^*\lambda^* = 0, \quad (13)$$

$$\Gamma : \frac{\partial \lambda^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (14)$$

$$t = T : \lambda^* = P \left( C_T^{uzm} - RC_T \right), \quad (15)$$

при идентификации начального поля имеем:

$$\nabla_{C_0} I = -\lambda^* \Big|_{t=0}. \quad (16)$$

Следующее приближение ищется итерационно по формуле:

$$C_0^{n+1} = C_0^n + \tau \nabla_{C_0} I, \quad (17)$$

где  $\tau$  – итерационный параметр, который определяется [1] с учетом решения задачи в вариациях, исходя из минимума функционала (11) по формуле:

$$\tau = \frac{\left( P \left( RC_T - C_T^{uzm} \right), PR\delta C_T \right)_M}{\left( PR\delta C_T, PR\delta C_T \right)_M}. \quad (18)$$

Здесь  $\delta C$  – решение задачи в вариациях:

$$\frac{\partial D\delta C}{\partial t} + L\delta C = 0, \quad (19)$$

$$\Gamma : \frac{\partial \delta C}{\partial n} = 0, \quad (20)$$

$$\sigma = 0 : \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} = 0, \quad (21)$$

с начальными данными:

$$\delta C(x, y, \sigma, 0) = -\lambda^*(x, y, \sigma, 0). \quad (22)$$

**Модифицированный вариационный алгоритм.** Данные измерений чаще всего имеются не во всех узлах области интегрирования, поэтому количество требуемых сопряженных задач для формулы оценки (10) существенно сокращается, так как оценка значений поля концентрации осуществляется только в точках измерений. Формула оценки используется для нахождения модельных оценок концентрации и вариаций, которые необходимы при вычислении итерационного параметра по формуле, аналогичной (18). В работе [7] показано, что модифицированный алгоритм имеет преимущество перед стандартным подходом при выполнении следующего условия:

$$N > \frac{k}{2J}, \quad (23)$$

где  $J$  – общее число итераций, необходимое для достижения минимума функционала,  $k$  – количество данных измерений,  $N$  – количество используемых процессоров.

Таким образом, процедура реализации алгоритма состоит в следующем:

- решается  $k$  сопряженных задач (5) – (7);
- оценка концентрации в точках измерений производится по формуле (10);
- вычисляются невязки прогноза;
- решается сопряженная задача (13) – (15);
- вычисляется градиент функционала по формуле (16);
- осуществляется оценка решения задачи в вариациях по формуле

$$\delta\bar{C} = \int_M \lambda_0^* C_0^* dM, \quad (24)$$

где  $C_0^*$  – решение задачи (5) – (7),  $\lambda_0^*$  – решение задачи (13) – (15); итерационный параметр определяется по формуле

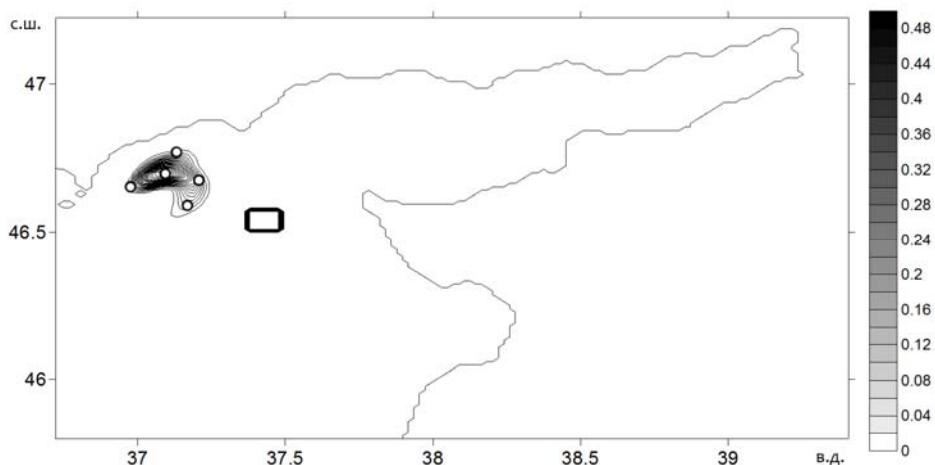
$$\tau = \frac{\left( P(R\bar{C}_T - C_T^{uzm}), PR\delta\bar{C}_T \right)_M}{(PR\delta\bar{C}_T, PR\delta\bar{C}_T)_M}; \quad (25)$$

следующее приближение ищется по формуле (17).

Указанный модифицированный вариационный алгоритм для одномерной задачи реализован в [8]. В результате численных экспериментов изучены возможности данного подхода. В данной работе описанный алгоритм применяется для модели переноса пассивной примеси в Азовском море.

**Результаты численных экспериментов.** Численные эксперименты проводились с моделью переноса пассивной примеси в Азовском море [4]. Был проведен расчет на установление модельного поля течений с постоянным ветром 10 м/с восточного направления. Полученные поля скоростей и коэффициентов турбулентной диффузии использовались в качестве параметров при интегрировании модели переноса пассивной примеси на срок 5 суток. При этом шаг по времени  $\Delta t = 240$  с, шаг по пространству  $\Delta x = 0,78$  км,  $\Delta y = 1,125$  км. По вертикали в модели используется расчетная сетка в  $\sigma$ -координатах с 15-ю горизонтами.

Начальное поле концентрации задавалось постоянным значением, равным единице в прямоугольной области (от поверхности до дна), изображен-



Р и с . 1 . Начальное поле, модельное поле и точки измерений.

ной на рис.1. На этом же рисунке представлен результат численного моделирования распространения пятна загрязнения за 5 суток. В качестве данных измерений выбирались значения в поле концентрации как в области максимальных, так и минимальных значений. На рис.1 точки измерений изображены белыми кружками. Считалось, что информация о поле концентрации имеется только на поверхности моря.

Проинициализированное начальное поле на основе стандартного подхода изображено на рис.2, а. Из рисунка видно, что найденное начальное пятно загрязнения располагается на месте первоначально заданного. Проведенные ранее численные эксперименты [5] показали, что в ходе дальнейших итераций постепенно максимальное значение концентрации стремится к первоначально заданному и уменьшается площадь в проинициализированном начальном поле. Точность восстановления начального поля зависит от поставленной задачи. В данном случае количество итераций было ограничено десятью. Аналогичное количество итераций было задано и при реализации модифицированного алгоритма ассимиляции. Начальное поле концентрации, полученное при численной реализации модифицированного вариационного алгоритма ассимиляции, изображено на рис.2, б. Такое начальное распределение концентрации хорошо согласуется с известным начальным полем, как по своему местоположению, так и по максимальным значениям концентрации. Из рис.2 видно, что основные отличия в пространственном распределении найденных начальных полей концентрации в основном находятся на периферии пятна загрязнения. Это можно объяснить тем, что наибольшие относительные ошибки метода оценки получаются в области небольших значений концентрации [6]. В области максимальных значений методы дают сравнимые результаты. Скорость достижения одинаковых максимальных значений у обоих алгоритмов различна. Если за первые три итерации модифицированный алгоритм дает значение 0,83, то для достижения таких значений при реализации стандартного подхода требуется 10 итераций. В работе [8] на одномерном примере показано, что модифицированный алгоритм на первых итерациях имеет некоторое преимущество в скоро-

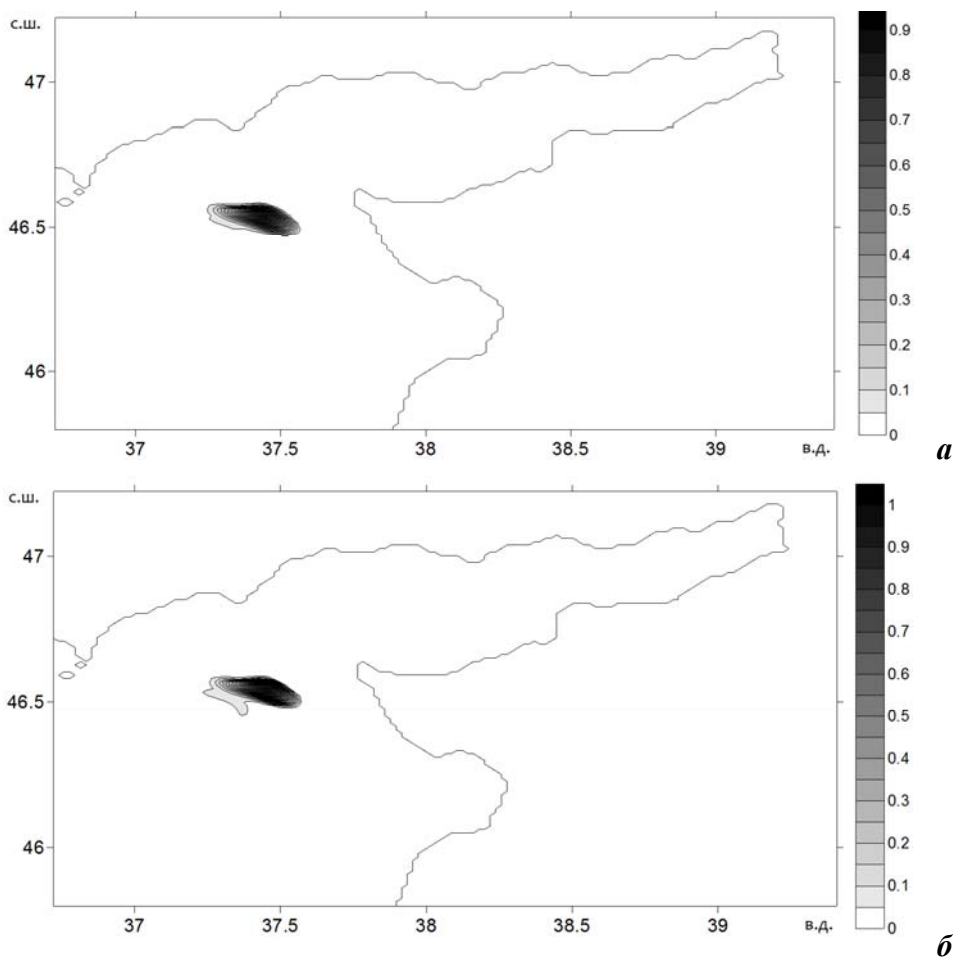


Рис. 2. Начальное поле: стандартный (а) и модифицированный (б) методы.

сти сходимости итерационного процесса. Этим же свойством обладает предложенный алгоритм и в трехмерном случае. На рис.3 изображены изменения максимальных значений концентрации в процессе итерационной идентификации начального поля. Из рисунка видно, что при реализации модифицированного алгоритма известное значение концентрации достигается быстрее за меньшее количество итераций. Учитывая приближенный характер применяемого метода оценки, в случае необходимости получения более точных распределений начальных полей, можно использовать комбинацию двух подходов. На первом этапе применяется модифицированный алгоритм, а в дальнейшем осуществляется реализация стандартного подхода. Отметим также, что при численной реализации модифицированного алгоритма появляется возможность решения соответствующих сопряженных задач в параллельном режиме, что, в свою очередь, позволяет оптимально использовать вычислительные ресурсы.

Таким образом, в результате численных экспериментов показано, что предложенный алгоритм позволяет более оперативно осуществлять идентификацию начальных полей концентрации загрязняющих веществ в море

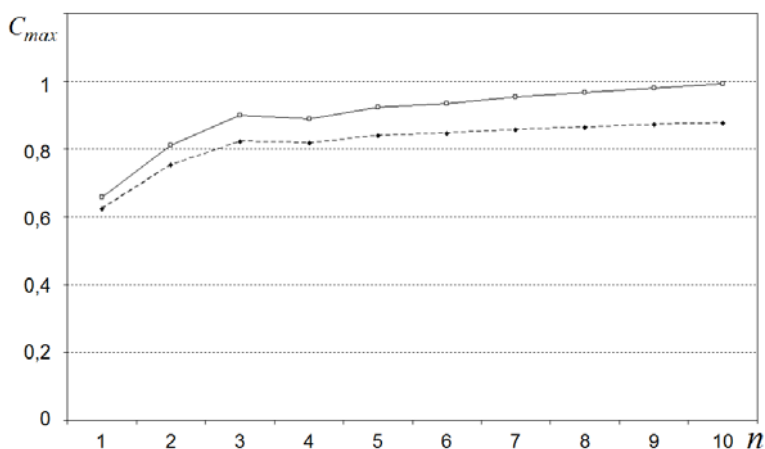


Рис. 3. Максимальное значение концентрации примеси в зависимости от номера итерации.

по сравнению со стандартной процедурой при использовании одинаковых вычислительных ресурсов. Результаты могут быть использованы при решении различных задач экологического мониторинга в акваториях Азовского и Черного морей.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пененко В.В. Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология.– 1979.– № 7.– С.77-90.
2. Кочергин В.С. Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– 2011.– вып.25, т.2.– С.370-376.
3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.– М.: Наука, 1982.– 320 с.
4. Иванов В.А., Фомин В.В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша.– Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008.– 363 с.
5. Кочергин В.С., Кочергин С.В. Реализация вариационного подхода при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси в Азовском море // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.– 2016.– № 3.– С.50-58.
6. Кочергин С.В., Кочергин В.С., Фомин В.В. Определение концентрации пассивной примеси в Азовском море на основе решения серии сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– 2012.– вып.26, т.2.– С.112-118.

7. *Кочергин С.В., Кочергин В.С.* Моделирование распространения примеси в Азовском море на основе решения сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежных и шельфовых зон моря.– 2016.– вып.4.– С.15-18.
8. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Модифицированный вариационный алгоритм ассимиляции данных измерений в модели переноса пассивной примеси // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.– 2018.– № 1.– С.61-67.

Материал поступил в редакцию 12.05.2018 г.  
После доработки 2.06.2018 г.

V.S.Kochergin, S.V.Kochergin

THE IMPLEMENTATION OF THE MODIFIED VARIATIONAL MEASUREMENTS  
DATA ASSIMILATION ALGORITHM IN PASSIVE TRACER TRANSPORT  
MODELS IN THE SEA OF AZOV

The numerical implementation of the modified variational measurements data assimilation algorithm of the passive admixture in transport model for the Sea of Azov water area is proposed. A standard variation procedure is also used to solve the problem of initial data identification. The results are compared with each other. In the course of numerical experiments, a significant reduction of the processor time used in the implementation of the proposed algorithm of data measurement assimilation was obtained.

KEYWORDS: modified variational algorithm, assimilation, conjugate problem, the Sea of Azov