

В.С.Кочергин, С.В.Кочергин

*Морской гидрофизический институт РАН, г.Севастополь***ИДЕНТИФИКАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО ПОЛЯ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА И ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СХЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ**

На основе метода оценки концентрации и сопряженных уравнений реализована процедура определения оптимальной схемы точек измерений с точки зрения сходимости итерационного процесса идентификации начального поля концентрации. Задача решается для одномерной модели переноса пассивной примеси.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *метод оценки поля концентраций, планирование эксперимента, сопряженная задача*

doi:10.22449/2413-5577-2018-1-58-63

**Введение.** При решении задач ассимиляции данных измерений и идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси естественным образом встает вопрос построения оптимальных планов. В понятие оптимальности плана можно вкладывать различный смысл. С математической точки зрения, при решении обратных задач, под оптимальным планом понимается множество точек измерений, распределенных по пространству и времени, дающее преимущества при реализации решаемой задачи. Вычислительные свойства алгоритмов решения обратных задач могут в значительной степени быть улучшены за счет оптимальной схемы измерений. В данном случае в качестве индикатора оптимальности мы рассматриваем скорость сходимости итерационного процесса.

**Построение оптимального плана.** Алгоритмы оптимального планирования [1, 2] в основном основаны на построении и изучении свойств информационной матрицы Фишера:

$$M(\varepsilon_N) = \sum_{i=1}^N F_i p_i F_i^T, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_N = \left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_N \\ p_1, p_2, \dots, p_N \end{array} \right\}$  – нормированный план,  $0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^N p_i = 1$ ,

$x_i$  – точки измерений,  $F_i$  – матрица Якоби, характеризующая зависимость вариации решения, например, поля концентрации примеси от вариаций тех или иных параметров задачи. Существуют специальные алгоритмы поиска оптимальных планов. Наиболее простой путь поиска оптимальной сети точек проведения измерений состоит в следующем:

- выбирается некоторый невырожденный начальный план;
- ищется дополнительная точка, добавление которой к плану улучшит обусловленность решаемой задачи;
- в дальнейшем наименее информативная точка плана отбрасывается.

Наряду с этим, существует возможность сравнения между собой несколько планов, заданных априори. Такое сравнение происходит по значе-

нию детерминанта построенной матрицы (1), который характеризует обусловленность решаемой задачи идентификации параметров численного моделирования, что является очень важным при решении обратных задач.

**Модель переноса пассивной примеси и вариационный алгоритм идентификации начального поля.** Для простоты изложения рассмотрим одномерную модель переноса пассивной примеси

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial UC}{\partial x} = k \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$x = 0 : \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad x = X : \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad t = 0 : C(x) = C_0(x),$$

где  $C$  – концентрация примеси,  $U$  – скорость,  $k$  – коэффициент турбулентной диффузии,  $C_0$  – концентрация в начальный момент времени.

Пусть задача решается на  $[0, T]$  и на конечный момент времени имеются данные измерений  $C_{изм}$ . Задача вариационной ассимиляции производится за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза:

$$I_0 = \frac{1}{2} (R(C - C_{изм}), R(C - C_{изм}))_D \Big|_{t=T}, \quad (3)$$

где  $D$  – область интегрирования модели, в одномерном случае  $D = [0, X]$ , скалярное произведение определено стандартным способом, а  $R$  – проекционный оператор восполнения нулями в областях, где отсутствуют данные измерений.

Умножая (1) на  $C^*$ , добавляя ограничения к (3), интегрируя по частям с учетом краевых условий, выбирая  $C^*$  как решение соответствующей сопряженной задачи из условия стационарности общего функционала  $I$  имеем [3]

$$\nabla_{C_0} I = C^* \Big|_{t=0}. \quad (4)$$

Далее в направлении этого градиента осуществляется итерационный спуск в пространстве параметров.

**Метод оценки, построение матрицы Якоби.** На основе метода сопряженных уравнений [4] задаче (2) можно поставить в соответствие сопряженную задачу

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} - U \frac{\partial C^*}{\partial x} - k \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

$$x = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial x} = 0, \quad x = X : \frac{\partial C^*}{\partial x} = 0, \quad t = T : C^*(x) = \begin{cases} 1/\text{mes}\Omega, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

где  $\Omega$  некоторая область в  $D$ . Выбирая в качестве  $\Omega$  ячейку расчетной сетки [5], получим формулу для определения концентрации в ней

$$\bar{C} = \int_D C_0(x) C^*(x) \Big|_{t=0} dD. \quad (6)$$

Пусть  $C_{изм}$  имеются в  $N$  точках, а  $C_0$  задано в  $K$  точках. Вариацию  $\frac{\partial C}{\partial C_0}$

в точках измерений можно представить в виде матрицы Якоби

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial C_0^1} & \frac{\partial C_2}{\partial C_0^1} & \dots & \frac{\partial C_N}{\partial C_0^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \ddot{C}_1}{\partial C_0^K} & \frac{\partial \ddot{C}_2}{\partial C_0^K} & \dots & \frac{\partial \ddot{C}_N}{\partial C_0^K} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Учитывая представление метода оценки (6) имеем

$$F = \begin{pmatrix} C_1^*(1) & C_2^*(1) & \dots & C_N^*(1) \\ C_1^*(2) & C_2^*(2) & \dots & C_N^*(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1^*(K) & C_2^*(K) & \dots & C_N^*(K) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $C_i^*(j)$  – решение сопряженной задачи для  $i$ -ого измерения в  $j$ -ой точке пространства. В случае идентификации других параметров модели задача даже упрощается, например, при идентификации постоянной мощности точечного импульсного источника матрица Якоби имеет размерность решаемой задачи.

**Результаты численных экспериментов.** Численные эксперименты проводились с одномерной моделью переноса пассивной примеси при следующих значениях входных параметров  $k = 2,5 \cdot 10^5$  см<sup>2</sup>/с,  $\Delta x = 10^5$  см,  $\Delta t = 1,2 \cdot 10^2$  с, количество шагов по времени 3600, которые соизмеримы с входной информацией при интегрировании трехмерной модели [6] для акватории Азовского моря.

В качестве начального поля концентрации задавалось гладкое поле, которое изображено на рис.1 штриховой линией. Решение модели (2) изображено на этом же рисунке пунктирной линией. В качестве данных измерений

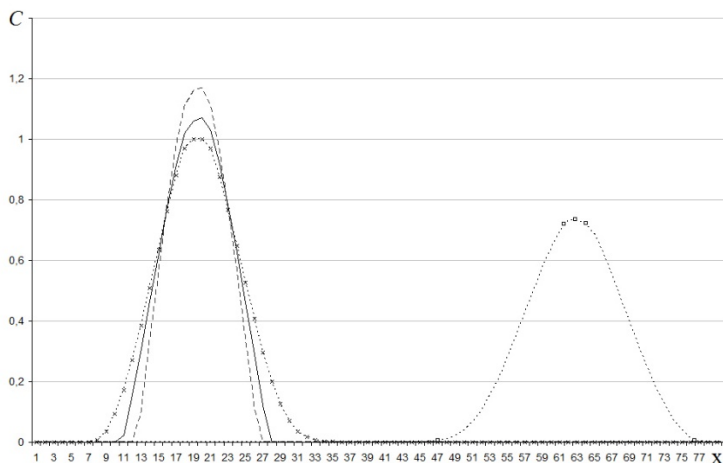
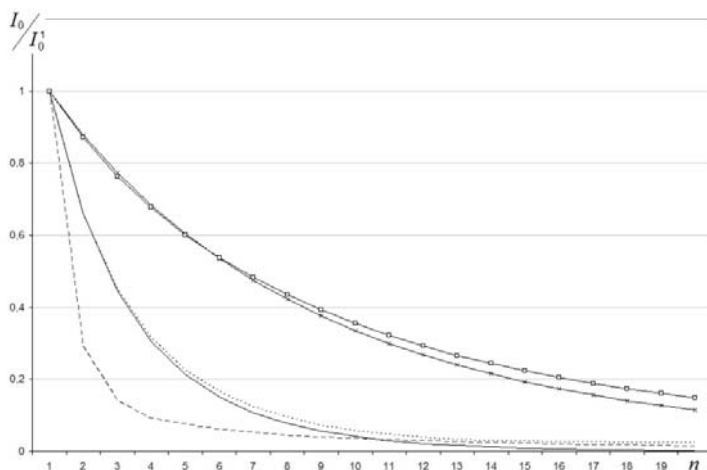


Рис. 1. Данные измерений, истинное и инициализированные начальные поля.

выбирались значения поля концентрации как в области максимальных, так и минимальных значений (белые квадраты на рисунке). При выборе в качестве  $C_{изм}$  всей доступной информации о  $C(x)$  результатом работы вариационного алгоритма идентификации  $C_0$  является поле концентрации, практически совпадающее с первоначально заданным. Отметим, что площадь, ограниченная этим графиком,  $S = 10,01$  при истинном значении  $S = 10,007$ . Таким образом, при ассимиляции полной информации о структуре поля концентрации на конечный момент времени вариационный алгоритм идентификации входных параметров дает надежные результаты с хорошей степенью точности. Понятно, что в реальных условиях невозможно иметь такую полную информацию о структуре поля концентрации. Структура получаемого в результате работы процедуры идентификации начального поля при ассимиляции измерений в одной точке в области максимальных значений изображена на рис.1 пунктирной линией с крестиками, при этом  $S = 11,641$ . При добавлении измерений в области максимальных значений (три точки измерений в области максимальных значений) получается аналогичный результат, при этом  $S = 11,684$ . При добавлении точек измерений на границе пятна загрязнения в случае трех точек в области максимальных значений имеем  $S = 10,646$ , а при ассимиляции одной точки в области максимальных значений и двух точек на границе получаем  $S = 10,625$ .

На рис.2 изображено падение функционала (3), нормированного на его значение при первой итерации для различных вариантов расчетов. Штриховая линия соответствует ассимиляции полной информации о поле концентрации на конечный момент времени. Сплошная линия характеризует вариант расчета при усвоении трех точек в области максимальных значений и двух на границе пятна загрязнения. Пунктирная линия соответствует ассимиляции трех точек в области максимальных значений, сплошная линия с квадратами соответствует варианту расчета с одной точкой в области максимальных значений и на границе пятна загрязнения. Линия с крестиками характеризует аналогичный расчет без учета информации о местоположении границы пятна загрязнения.



Р и с . 2 . Падение нормированного функционала в процессе итераций.

Восстановление такой пространственной структуры начального поля происходит за счет своеобразной экстраполяции при работе вариационной процедуры ассимиляции за счет члена, учитывающего турбулентную вязкость в уравнении переноса. Результат идентификации искомого параметра и скорость сходимости итерационного процесса зависит от уровня значений коэффициента турбулентной диффузии. В данной работе параметры выбирались соответствующими модели [6]. Измерения в области максимальных значений с точки зрения построения оптимального плана наиболее информативны [7], но такие измерения не обладают информацией о границе пятна загрязнения. Поэтому, выбрав в качестве измерения самое максимальное значение и задав примерные границы пятна загрязнения для конечного момента времени, мы получим результат, изображенный на рис.1 сплошной линией. При таком плане измерений восстанавливается не только структура начального поля, но и мощность начального пятна загрязнения. Добавление измерений на границе пятна загрязнения слабо влияет на скорость сходимости итерационного процесса поиска оптимального распределения поля концентрации на начальный момент времени, но оказывает существенное влияние на получаемые значения суммарной концентрации. Отметим, что при небольшом числе данных измерений и множестве требуемых итераций возможно эффективное применение модифицированного вариационного алгоритма идентификации [8]. С точки зрения теории оптимального планирования детерминант матрицы (1) получается более большим при задании трех измерений в области максимальных значений. Тем не менее, информация о границе пятна загрязнения оказывается очень полезной для получения других, в том числе интегральных, характеристик начального пятна загрязнения. В качестве такой информации при моделировании динамики определенных трассеров могут служить спутниковые данные. При возможности увеличения количества точек плана, добавлять их следует в области максимальных значений.

Результаты могут быть использованы для решения различных задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера в акваториях Азовского и Черного морей.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горский В.Г. Планирование кинетических экспериментов.– М.: Наука, 1984.– 240 с.
2. Марчук Г.И., Ермаков С.М. О некоторых проблемах планирования эксперимента // Математические методы планирования эксперимента.– Новосибирск, 1981.– С.3-18.
3. Пененко В.В. Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология.– 1979.– № 7.– С.77-90.
4. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.– М.: Наука, 1982.– 320 с.

5. *Кочергин В.С.* Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2011.– вып.25, т.2.– С.270-276.
6. *Иванов В.А., Фомин В.В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2008.– 363 с.
7. *Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Склад С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2002.– 238 с.
8. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Реализация вариационного подхода при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси в Азовском море // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.– 2016.– № 3.– С.50-58.

Материал поступил в редакцию 16.11.2017 г.  
После доработки 24.01.2018 г.

V.S.Kochergin, S.V.Kochergin

#### **IDENTIFICATION OF THE INITIAL FIELD OF THE TRANSPORT MODEL AND CONSTRUCTION OF THE OPTIMAL SCHEME OF MEASUREMENTS**

Based on the method of concentration estimation and conjugate equations, the procedure for determining the optimal scheme of measurement from the point of view of the convergence of the iterative process of identifying of the initial field concentration is realized. The problem is solved for a one-dimensional model of transport of a passive impurity.

**KEYWORDS:** method for estimating the concentration field, planning an experiment, conjugate problem