

Д.С.Сабурин<sup>1</sup>, Т.Г.Елизарова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г.Москва

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г.Москва

### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙШЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ В АЗОВСКОМ МОРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СГЛАЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

Предлагается новый подход к численному моделированию циркуляции морей и океанов. Апробация осуществляется на задаче о сейшевых колебаниях Азовского моря.

Модель основана на двумерной системе уравнений мелкой воды в потоковой форме в декартовой системе координат с учетом факторов топографии дна, силы Кориолиса, силы трения ветра о свободную поверхность, силы трения о дно. Новизна подхода заключается в численном алгоритме, который основан на процедуре регуляризации уравнений мелкой воды. Его достоинства: отсутствие линеаризации уравнений, возможность расчета течений с зонами осушения и обводнения, возможность расчета как с силой трения о дно, так и без нее, эффективность в плане вычислительных затрат и естественная возможность для распараллеливания.

Расчеты проведены для реальной формы акватории Азовского моря для времени до 3 суток включительно на сетке  $1521 \times 1091$  с шагами  $250 \times 250$  м. Авторы приводят основные схемы поверхностных течений и пространственных распределений уровня моря, в том числе вблизи крупных населенных пунктов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *регуляризованные уравнения мелкой воды, разностная схема, сейшевые колебания, Азовское море*

Азовское море является шельфовой зоной Черного моря и имеет огромное транспортное, промышленное и стратегическое значение для юга России. Вместе с этим оно относится к числу «беспокойных» внутренних морей, где сильно распространены опасные природные явления, такие, как сгонно-нагонные процессы, штормовые волны и другие [1]. Сейшевые колебания также сильно распространены в Азовском море. Они могут значительно усиливать ветровые сгонно-нагонные явления, создавая изменения уровня, которые представляют повышенную степень опасности для береговой инфраструктуры.

К настоящему моменту моделированию сейшевых колебаний в Азовском море и общей циркуляции Азовского моря посвящен целый ряд работ, среди которых укажем [2] – [7]. Основными параметрами этих моделей являются переменная глубина водоема, сила Кориолиса, переменное атмосферное давление, трение на дне и свободной поверхности. Модели [2] – [4] являются полными трехмерными, другие являются двумерными, основанными на уравнениях мелкой воды.

Отметим, что в перечисленных моделях используются линеаризованный вид уравнений, для численной аппроксимации которых (уравнений) используются сетки “В” и “С” по классификации Аракавы. Первое ухудшает качество модели, делая ее менее точным, полуразнесенные и разнесенные

расчетные сетки значительно усложняют разностный алгоритм, вынуждая использовать неявные разностные схемы по времени, а сложные программные комплексы становятся «вещью в себе».

Поэтому основная цель данной статьи – предложить альтернативу используемым для моделирования Азовского моря численным методам, основанную на полных уравнениях мелкой воды с явной аппроксимацией переменных центральными разностями, которая при этом будет устойчивой, слабо диссипативной, и как следствие, достаточно точной.

**Исходная система уравнений и метод регуляризации.** Рассматривается двумерная система уравнений мелкой воды в потоковой форме. Направления осей координат указаны на рис. 1. В качестве внешних факторов в модели учитываются касательные напряжения трения ветра, сила Кориолиса, топография дна и трение о дно:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_x}{\partial x} + \frac{\partial hu_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial hu_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu_x^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (hu_x u_y) = hf^c u_y - gh \frac{\partial b}{\partial x} + \tau^{x,w} - \tau^{x,b},$$

$$\frac{\partial hu_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu_y^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (hu_x u_y) = -hf^c u_x - gh \frac{\partial b}{\partial y} + \tau^{y,w} - \tau^{y,b}.$$

Здесь  $h(x, y, t)$  – высота жидкости над уровнем дна,  $u_x(x, y, t)$  и  $u_y(x, y, t)$  – компоненты скорости течения,  $g$  – ускорение силы тяжести, функция  $b(x, y)$  описывает топографию дна.

Проекции силы трения ветра на поверхность воды обозначены через  $\tau^{x,w} = \gamma |W| W_x$  и  $\tau^{y,w} = \gamma |W| W_y$ , где  $W_x$  и  $W_y$  – компоненты скорости ветра,  $|W| = |W_x|^2 + |W_y|^2$  – модуль скорости ветра,  $\gamma$  – коэффициент трения ветра о свободную поверхность воды. Проекции силы трения о дно водоема обозначены как  $\tau^{x,b} = \mu |u| u_x$  и  $\tau^{y,b} = \mu |u| u_y$ , где  $\mu$  – коэффициент трения,  $|u| = |u_x|^2 + |u_y|^2$  – модуль скорости потока. Указанные выше коэффициенты трения являются заданными безразмерными величинами и для морских акваторий составляют  $\mu = 2,6 \cdot 10^{-3}$  и  $\gamma = 3,25 \cdot 10^{-6}$  [8]. Скорость ветра также задается из данных натуральных наблюдений и может зависеть от времени. В правые части уравнений движения входит сила Кориолиса  $f^{corr}$  с компонентами  $f_x^{corr} = f^c u_y$ ,  $f_y^{corr} = -f^c u_x$ , где  $f^c$  – параметр Кориолиса.

К указанным выше уравнениям применяется процедура регуляризации – осреднения по малому промежутку времени  $\tau$ , в результате которой выводится новая система уравнений, называемая системой регуляризованных уравнений мелкой воды (РУМВ). Подробное описание этой процедуры представлено в [9]. Система РУМВ отличается от системы УМВ наличием дополнительных слагаемых порядка  $O(\tau)$ , которые имеют вид вторых пространственных производных от переменных системы. Эти слагаемые вносят в систему дополнительную диссипацию, которая сглаживает численные осцилляции решения, делая ее более устойчивой. Это позволяет использовать простые численные алгоритмы, которые быстро считают и легко распараллеливаются. При  $\tau = 0$  система РУМВ переходит в систему УМВ.

В основе разностного алгоритма лежит схема с центральными разностями. Применяются простые пространственные неразнесенные сетки. Потoki аппроксимируются центральными разностями. Используется явная схема по времени. Численная устойчивость обеспечивается дополнительными слагаемыми с  $\tau$ . Здесь  $\tau$  соотносится со временем, необходимым малому возмущению для преодоления расчетной ячейки, и поэтому прямо пропорциональна разрешению пространственной сетки:

$$\tau = \alpha \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{gh}},$$

где  $0 < \alpha < 1$  – безразмерный численный коэффициент, выбираемый из условий точности и устойчивости счета. В описываемых ниже расчетах  $\alpha = 0,2$ .

Для временной аппроксимации используется условие Куранта:

$$\Delta\tau = \beta \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{gh}},$$

безразмерное число Куранта  $0 < \beta < 1$  зависит от величины параметра регуляризации  $\tau$  и подбирается в процессе вычислений для обеспечения монотонности численного решения. В описываемых ниже расчетах  $\beta = 0,5$ . Подробное описание процесса построения разностной схемы можно найти в [9].

Построенная схема обладает целым рядом достоинств. В [10] показано выполнение условия покоящейся жидкости (*well-balanced scheme*): для любого момента времени  $h + b = \text{const}$ ,  $u = 0$ . Следующим важным техническим достоинством схемы является наличие встроенного алгоритма для расчетов зон осушки/обводнения [10]. Также схема позволяет при необходимости выполнять расчеты без силы донного трения.

Для уравнений мелкой воды с регуляризирующими слагаемыми получен ряд теоретических результатов: для них справедлив закон невозрастания полной энергии, что доказывает диссипативный характер построенного регуляризатора [11]. В [12] аналогичный результат в виде строгих теорем получен для указанной системы, описывающей течения над плоским дном. Здесь же доказана единственность решения для линейного приближения этой системы. В 2016 г. вышла монография Ю.В.Шеретова, посвященная основным теоретическим результатам по системам РУМВ [13]. Также в 2016 г. вышел препринт, посвященный применению данного подхода к двухслойным уравнениям мелкой воды [14].

На основе данных уравнений был решен целый ряд практически важных задач, например, таких, как моделирование цунами в городе Мияко на северо-востоке Японии [9], моделирования колебаний топлива в баке газозавоза при его лобовом столкновении с ледовым препятствием [15], моделирование волн Фарадея [16] и другие.

**Описание численных экспериментов.** Рассматривается область, включающая в себя Азовское море, Керченский пролив и часть Черного моря (рис.1). В качестве начальных условий выбраны условия невозмущенной поверхности моря  $h = h_0$  и  $u_x = u_y = 0$  м/с, где  $h_0$  – полная глубина моря, соответствующая невозмущенной поверхности моря. При  $t = 0$  включается ветер со скоростью 15 м/с, который дует в одном направлении в течении

10 ч, после чего – выключается. В данной статье будут отображены результаты моделирования ветра с западной и южной стороны.

В качестве граничных условий ставятся условия непротекания для  $h$ , отражения для  $u$  и условие свободного перемещения на границе в области Черного моря. Расчеты выполняются на подробной сетке  $250 \times 250$  м, количество точек –  $1521 \times 1091 = 1\,659\,411$ . Данные были предоставлены сотрудниками Государственного океанографического института им.Н.Н.Зубова.

Рассмотрим основные течения, возникающие при западном и южном направлениях ветра. Пространственное распределение уровня моря и характерные течения, соответствующие максимальному нагону перед выключением ветра ( $t = 10$  ч), представлены на рис.1.

Здесь цветом обозначены повышения (до + 1 м, красным) и понижения (до – 1 м, синим) уровня моря относительно равновесного. Черными линиями нарисованы линии тока – касательные к мгновенным векторам скоростей течения. Основное направление линий тока соответствует направлению ветра. Тем не менее, за счет сложной топографии дна и береговой линии, в некоторых частях возникают вихревые течения. Так, при западном ветре они особенно заметны в районе городов Темрюк, Приморо-Ахтарск, Соляное и кос Игоревская и Бердянская. При южном ветре наблюдается возникновение единого антициклонического течения в западном районе Азовского моря. Кроме того, наблюдаются локальные вихри в районе городов Генчешек, Темрюк, Соляное, а также кос Игоревская, Бердянская и Белосарайской косы.

На рис.2 показана эволюция сейши после выключения ветра. Шесть последовательных рисунков соответствуют положениям сейши на моменты времени  $t = 10 - 35$  ч. Цветом обозначены повышения (до + 0,2 м, красным) и понижения (до – 0,2 м, синим) уровня относительно равновесного.

С течением времени наблюдается вращение сейши против часовой стрелки. При  $t = 24 - 25$  ч сейша совершает полный оборот. При этом ее амплитуда уменьшается более чем в 10 раз.

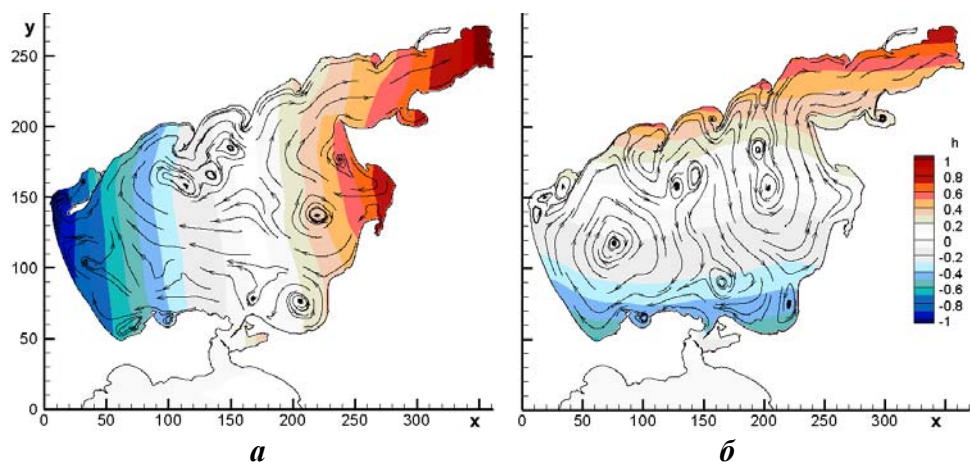
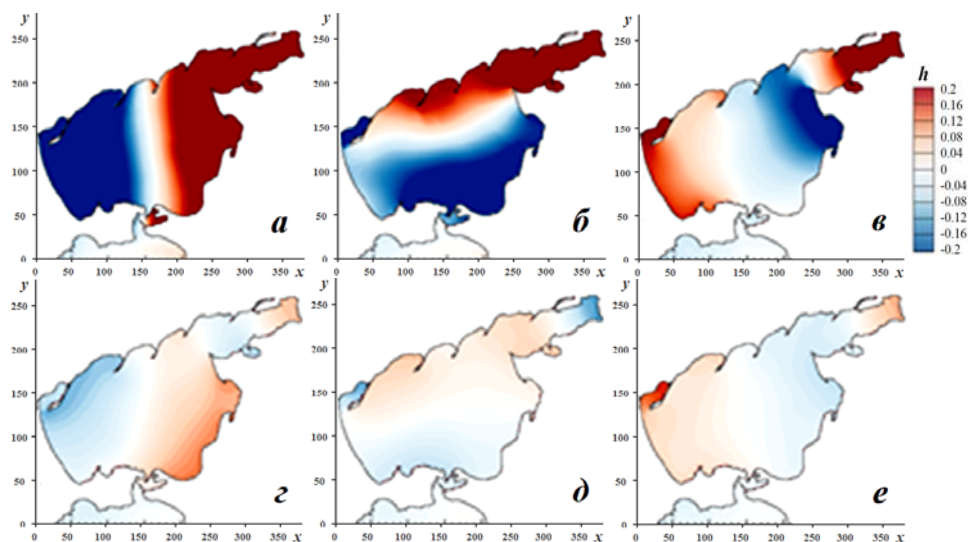
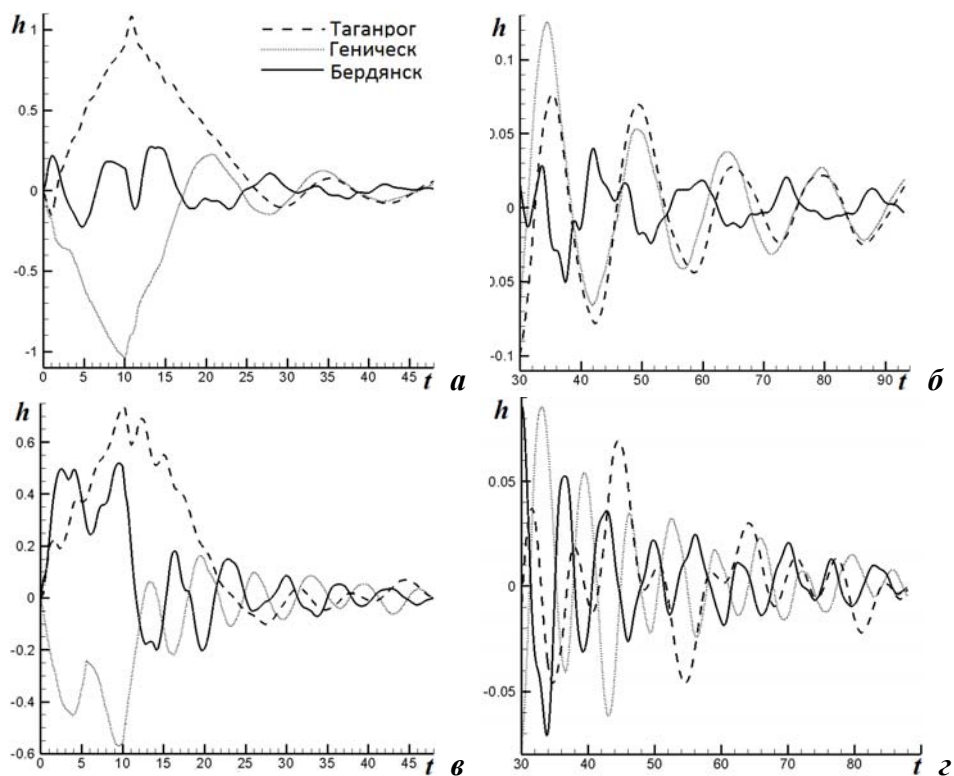


Рис. 1. Циркуляция Азовского моря при продолжительном действии ветра ( $t = 10$  ч) западного (а) и южного (б) направлений.



Р и с . 2 . Основные положения сейши после выключения ветра:  $t = 10$  (а), 15 (б), 20 (в), 25 (г), 30 (д), 35 (е) ч.



Р и с . 3 . Величины повышения и понижения уровня моря в крупных населенных пунктах при западном ветре (а, б) при  $0 \leq t \leq 45$  ч (а),  $30 \leq t \leq 90$  ч (б); при южном ветре (в, г) при  $0 \leq t \leq 45$  ч (в),  $30 \leq t \leq 90$  ч (г). На графиках по оси  $x$  указано время в часах, по оси  $y$  – высота  $h$  в метрах.

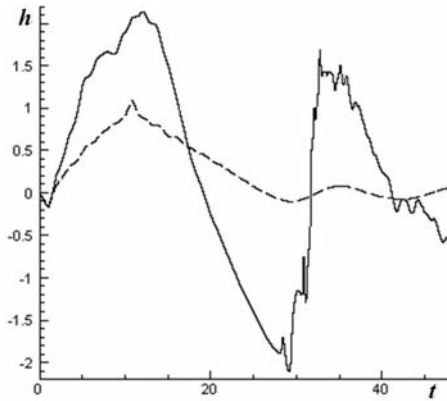


Рис. 4. Сравнение сейшевых колебаний в городе Таганрог при западном ветре при наличии силы трения (—) и без нее (- - -).

Графики изменения уровня моря относительно равновесного вблизи крупных населенных пунктов показаны на рис.3. Данные об уровне моря считывались с шагом, равным временному шагу разностной схемы  $\Delta t = 3,9$  с.

При западном ветре сейшевые колебания наиболее четко видны в городах Бердянск, Таганрог, Геническ. Кривые последних двух являются как бы зеркальными отражениями друг друга, т.к. находятся на противоположных концах сейши. С течением времени (при  $t > 40$  ч, рис.3, б) их кривые близки к линиям гармонических колебаний и практически совпадают

друг с другом. Период колебаний составляет 15,5 – 15,8 ч.

При южном ветре в колебания в городе Геническ практически не наблюдаются. Наиболее четко здесь видны колебания в городах Темрюк и Бердянск, которые в этом случае находятся на противоположных концах сейши и имеют одинаковый период колебаний, равный 6,2 – 6,5 ч. В Таганроге характер осцилляций более сложный, здесь видно сложение колебаний разных частот.

В рамках описания возможностей модели приводится сравнение сейшевых колебаний при западном ветре с наличием силы трения о дно и без нее. Соответствующий график приведен на рис.4.

График демонстрирует сильное влияние силы трения о дно на амплитуду сейшевых колебаний. В то же самое время, трение не оказывает влияние на их период. За один оборот сейши амплитуда колебаний в модели с силой трения о дно затухает в 5 – 6 раз быстрее.

Для оценки быстродействия программ с подобным алгоритмом приводится сравнительная таблица расчетов при различных профилях дна и количества узлов пространственной сетке (табл.). Графа «условия» соответствует краткому описанию расчета: «расчет без рельефа дна» соответствует условиям ( $b \equiv 0$ ) и начальной высоте  $h_0 = 5$  м; расчет «Азовское море» – со-

Т а б л и ц а . Оценка быстродействия программы для расчета циркуляции морей и океанов с реализованным методом регуляризованных уравнений мелкой воды для различных разностных сеток и топографий дна.

условия	размер области, км	кол-во точек	период расчета, дни	шаг по времени, с	время расчета (CPU), мин
расчет без рельефа дна	380 × 275	1000 × 200	7	62	29
Азовское море	380 × 275	1591 × 1111	1	3,8	647
Черное море	1144 × 636	286 × 159	7	14	24

ответствует топографии дна Азовского моря и равновесному распределению уровня моря, расчет «Черное море» – для топографии Черного моря и равновесного распределения уровня моря. Все остальные характеристики расчетов указаны в таблице. Расчеты проводились на персональном ноутбуке со следующими характеристиками: процессор Intel® Core™ m5-6Y54, двухъядерный, с CPU – 1.10Gz, ОЗУ – 8 ГБ.

**Заключение и выводы.** В рамках данной статьи был представлен новый метод численного расчета для гидродинамических течений в морских акваториях. Для этого класса задач метод обладает целым рядом качеств, такими, как вычислительная точность совместно с простотой реализации, скрытыми возможностями для параллельной реализации и расчет зон осушки/обводнения, которые делают его применение очень эффективным.

Возможности метода были показаны на примере задачи о сейшевых колебаниях в Азовском море, возникающих при продолжительном ветре в постоянном направлении. Были получены картины циркуляции и эволюция уровня моря, а также картины колебаний уровня моря вблизи больших населенных пунктов. Основные периоды колебаний для них составили 15,6 и 6,46 ч.

Авторы искренне верят, что применение описанного алгоритма в данном классе задач позволит не только упростить вычислительные алгоритмы и ускорить расчет, но и улучшить качество и точность самих моделей. Авторы выражают благодарность сотрудникам Государственного океанографического института Н.А.Дианскому и В.В.Фомину за привлечение внимания авторов к задаче о моделировании ветровых воздействий в Азовском море, помощь в использовании данных по топографии дна и натурным наблюдениям, а также за постоянное внимание к работе. Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00048а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Доценко С.Ф., Иванов В.А.* Природные катастрофы Азово-Черноморского региона.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2010.– 175 с.
2. *Фомин В.В.* Численная модель циркуляции вод Азовского моря // Научные труды УкрНИГМИ.– 2002.– вып.249.– С.246-255.
3. *Zalesny V.B., Diansky N.A., Fomin V.V., et al.* Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.– 2012.– v.27, № 1.– P.95-111.
4. *Иванов В.А., Черкесов Л.В., Шульга Т.Я.* Исследование свободных колебаний уровня Азовского моря, возникающих после прекращения длительного действия ветра // Морской гидрофизический журнал.– 2015.– № 2.– С.15-25.
5. *Matishov G.G., Inzhebeikin Yu.I.* Numerical study of the Azov sea level seiche oscillations. // Oceanology.– 2009.– v.49, № 4.– P.445-452.
6. *Филипов Ю.Г.* Свободные колебания уровня Азовского моря // Метеорология и гидрология.– 2012.– № 2.– С.78-83.
7. *Экстремальные* колебания уровня Азовского моря, включая Керченский пролив, в безледный период <http://oceanography.ru/index.php/ru/component/jdownloads/viewdownload/6-/69>
8. *Дианский Н.А.* Моделирование циркуляции океана и исследование его реакции на короткопериодные и долгопериодные атмосферные воздействия.– М.: Физматлит, 2013.– 271 с.

9. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 2011.– т.51, № 1.– С.170-184.
10. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды для численного моделирования течений с подвижной береговой линией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 2016.– т.56, № 4.– С.158-177.
11. Злотник А.А. Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы и уравнение энергетического баланса // Математическое моделирование.– 2012.– т.24, № 10.– С.51-64.
12. Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В. Единственность решения регуляризованных уравнений Сен-Венана в линейном приближении // Вестн. Тверск. гос. ун-та. Серия «Прикладная математика».– 2012.– вып.1(24).– С.5-7.
13. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики.– Тверь: Тверской государственный университет, 2016.– 222 с.
14. Елизарова Т.Г., Иванов А.В. Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды / Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.– 2016.– № 69.– 27 с.
15. Елизарова Т.Г., Сабурин Д.С. Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках // Математическое моделирование.– 2013.– т.25, № 3.– С.75-88.
16. Елизарова Т.Г., Сабурин Д.С. Численное моделирование волн Фарадея на основе уравнений гидродинамики в приближении мелкой воды // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. Физика и астрономия.– 2015.– № 1.– С.3-8.

Материал поступил в редакцию 01.12.2016 г.  
После доработки 26.05.2017 г.

D.S.Saburin, T.G.Elizarova

#### NUMERICAL SIMULATION OF SEICHE OSCILLATIONS IN THE SEA OF AZOV WITH USE OF THE SMOOTHED EQUATIONS OF HYDRODYNAMICS

A new approach to numerical modeling of sea and ocean circulation is proposed. The approbation is carried out on the problem of seiche oscillations in the Sea of Azov.

The model is based on a two-dimensional system of shallow water equations in stream form in a Cartesian coordinate system, taking into account bottom topography, Coriolis force, wind friction force on the free surface, and frictional forces on the bottom. The novelty of the approach consists in the numerical algorithm, which is based on the procedure for regularizing the shallow-water equations. Its advantages are: the lack of linearization of equations, the possibility to calculate currents with dehumidification and watering zones, the possibility to calculate both frictional forces on the bottom and without it, efficiency in terms of computational costs, and a natural opportunity for parallelization.

Calculations were carried out for the real Sea of Azov for a time up to 3 days inclusive on the grid  $1521 \times 1091$  with steps of  $250 \times 250$  m. The authors give the main patterns of surface currents and spatial distributions of sea level, including near large settlements.

KEYWORDS: regularized shallow water equations, difference scheme, seiche oscillations, the Sea of Azov