УДК 51.37

В.С.Кочергин, С.В.Кочергин

Морской гидрофизический институт РАН, г.Севастополь

ВАРИАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

На основе метода сопряженных уравнений построена модификация вариационного метода ассимиляции данных измерений для модели переноса пассивной примеси с использованием многопроцессорной системы. Получены условия, при которых модифицированный алгоритм имеет преимущества перед стандартным подходом.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *вариационный алгоритм, функционал невязок, поле концентрации, усвоение данных измерений, сопряженная задача*

Введение. Развитие современной вычислительной техники дает широкие возможности исследователям для реализации сложных численных моделей, требующих большие объемы вычислений. Многопроцессорные вычислительные системы дают дополнительное преимущество при интегрировании численных моделей. Однако выбор методов и построение алгоритмов реализации высокопроизводительных параллельных вычислений является сложной задачей, требующей индивидуального подхода. В данной работе при реализации вариационного алгоритма ассимиляции данных измерений для модели переноса пассивной примеси используется метод оценки [1], основанный на методе сопряженных уравнений [2].

Метод сопряженных уравнений, формула оценки. Рассмотрим модель переноса пассивной примеси [3 – 5] в σ-координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + LC = 0 \tag{1}$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma: \frac{\partial C}{\partial n} = 0, \tag{2}$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\sigma = 0: \ \frac{\partial C}{\partial \varsigma} = 0, \qquad \sigma = -1: \ \frac{\partial C}{\partial \varsigma} = 0 \tag{3}$$

и начальными данными

$$C(x, y, \varsigma, 0) = C_0(x, y, \varsigma), \tag{4}$$

где $L = \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma}$, $t \in [0, T]$ – время; D – динамическая глубина; C – концентрация примеси; U, V, W – компоненты поля скорости; A_H и K – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно; n – нормаль к боковой границе, Γ – граница области M; $M_t = M \times [0, T]$.

Задаче (1) – (4) поставим сопряженную задачу:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} + L^* C^* = 0, \tag{5}$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \;\; \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \;\; \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0\,, \tag{6}$$

$$t = T : C^* = h\,, \tag{7}$$

где L^* формально сопряженный оператор оператору L.

Умножая (1) – (4) на C^* и интегрируя по частям, с учетом аналога уравнения неразрывности и (5) – (7) получим

$$\int_M hCdM = \int_M C_0 C^* dM. \tag{8}$$

Выберем h в виде

$$h = \begin{cases} \dfrac{1}{m(\Omega)} - & \text{в области } \Omega \\ 0 \;\; - & \text{вне области } \Omega \end{cases}, \tag{9}$$

где m – мера некоторой области $\Omega \in M$. При этом, в левой части выражения (8) получаем среднюю концентрацию $\overline{C}_T$ в Ω на момент времени T.

Выбрав в качестве Ω ячейку расчетной сетки, имеем

$$\overline{C}_T = \int_M C_0 C^* dM \;\; . \tag{10}$$

Таким образом, используя решение сопряженной задачи (5) – (7), по формуле (10) можно оценить концентрацию примеси в заданной ячейке. Численные эксперименты, проведенные в [1, 5], показали хорошую точность воспроизведения поля концентрации по начальным данным и решению серии сопряженных задач без интегрирования основной модели переноса.

Вариационный метод ассимиляции. Задача ассимиляции данных измерений может производиться за счет идентификации различных входных параметров на основе минимизации квадратичного функционала качества прогноза

$$I_0 = \frac{1}{2}\left(P(C - C_{изм}), P(C - C_{изм})\right)_M, \tag{11}$$

где P – оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений. Следуя [6], имеем:

$$I = I_0 + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + LC, \lambda^*\right)_{M_t} + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, \lambda^*\right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, \lambda^*)_M + \\ + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^*\right)_{\sigma_t^0} + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^*\right)_{\sigma_t^{-1}}, \tag{12}$$

где скалярное произведение определяется стандартным образом. Следует отметить, что квадратичный функционал (11) выпуклый, а ограничения (1) – (4) линейные, следовательно, функционал (12) также выпуклый, а минимум его единственный. Записывая вариацию функционала (12) и интегрируя по частям, с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности выберем в качестве множителей Лагранжа решение следующей задачи:

$$-\frac{\partial D\lambda^*}{\partial t} + L^*\lambda^* = 0, \tag{13}$$

$$\Gamma : \frac{\partial \lambda^*}{\partial n} = 0, \;\; \sigma = 0 : \frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} = 0, \;\; \sigma = -1 : \frac{\partial \lambda^*}{\partial \sigma} = 0\,, \tag{14}$$

$$t = T : \lambda^* = P\left(C_{изм} - C\right). \tag{15}$$

Тогда при идентификации начального поля имеем:

$$\nabla_{C_0} I = \lambda^* \big|_{t=0}\,. \tag{16}$$

Итерационный спуск осуществляется по формуле:

$$C_0^{n+1} = C_0^n + \tau \nabla_{C_0} I\,, \tag{17}$$

где τ – итерационный параметр, который ищется с учетом решения задачи в вариациях.

Модификация вариационного метода ассимиляции данных измерений. Чаще всего данные измерений имеются не во всех узлах области интегрирования, поэтому количество требуемых сопряженных задач для формулы оценки (10) существенно сокращается, так как оценка значений поля концентрации осуществляется только в точках измерений. Для того чтобы оценить концентрацию $\overline{C}$, необходимо решить k сопряженных задач, где k – количество точек измерений. Аналогично по этим же решениям сопряженных задач можно оценить решение задачи в вариациях:

$$\delta \overline{C} = \int_M \lambda_0^* C_0^* dM\,, \tag{18}$$

где C_0^* – решение задачи (5) – (7), λ_0^* – решение задачи (13) – (15). Таким образом, при решении основной задачи производится оценка по формуле (10), вариация оценивается по соотношению (18), а для построения градиентов функционала качества прогноза в пространстве параметров интегрируется сопряженная задача (13) – (15).

При реализации вариационного алгоритма идентификации основное время счета занимает интегрирование основной, сопряженной задач и задачи в вариациях для каждой итерации. Отметим, что чем больше отрезок времени интегрирования модели, тем больше итераций требуется для достижения минимума функционала при прочих равных условиях. Пусть t_p – процессорное время интегрирования модели на $[0, T]$, тогда суммарное время реализации стандартного алгоритма идентификации $t_s = 3Jt_p$, где J – общее число итераций необходимое для достижения минимума функционала. При реализации модифицированного алгоритма общее время счета $t_m = t_p(J + k/R)$, где k – количество данных измерений, а R – количество используемых процессоров. Пусть $t_m < t_s$ тогда имеем:

$$R > \frac{k}{2J}. \qquad (19)$$

Для того чтобы модифицированная процедура вариационной идентификации имела преимущество перед стандартной, необходимо, чтобы для количества используемых процессоров R выполнялось соотношение (19). Применение такого подхода при реализации вариационного алгоритма ассимиляции позволит осуществить поиск оптимальных входных параметров моделирования с использованием многопроцессорной вычислительной техники, что существенно улучшит оперативность получения прогностических значений полей загрязняющих веществ.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2014-0010 "Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов определяющих функционирование и эволюцию экосистем Черного и Азовского морей на основе современных методов контроля состояния морской среды и грид-технологий".

Список литературы

1. *Кочергин В.С.* Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2011.– вып.25, т.2.– С.270-276.
2. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.– М.: Наука, 1982.– 320 с.
3. *Иванов В.А., Фомин В.В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2008.– 363 с.
4. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма // Морской гидрофизический журнал.– 2015.– № 2.– С.79-88.
5. *Кочергин С.В., Кочергин В.С., Фомин В.В.* Определение концентрации пассивной примеси в Азовском море на основе решения серии сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2012.– вып.26, т.2.– С.112-118.
6. *Пененко В.В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов.– Л.: Гидрометеоиздат, 1981.– 350 с.

Материал поступил в редакцию 12.02.2016 г.
После доработки 17.11.2016 г.

V.S.Kochergin, S.V.Kochergin

VARIATIONAL ALGORITHM OF MEASURING DATA ASSIMILATION IN THE MODEL OF PASSIVE IMPURITY TRANSPORT

On the basis of conjugate equations method for the model of passive impurity transport the variational algorithm of measuring data assimilation was modified using a multiprocessor system. The conditions when the modified algorithm has advantages over the conventional approach were revealed.

KEYWORDS: variational algorithm, residual functional, field of concentration, measurement data assimilation, adjoint problem