

С.В.Кочергин, В.С.Кочергин

*Морской гидрофизический институт РАН, г.Севастополь***МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ  
В АЗОВСКОМ МОРЕ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ**

Рассматривается модель переноса пассивной примеси в Азовском море. На её основе реализован вариационный алгоритм идентификации постоянной мощности источника загрязнения. На тестовом примере показана работоспособность алгоритма поиска оптимального значения мощности источника, согласованного с данными измерений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *идентификация мощности источника, вариационный алгоритм, функционал невязок, поле концентрации, усвоение данных измерений, Азовское море*

При изучении динамики распространения примесей необходимо использование как современных математических моделей [1 – 3], так и методов усвоения данных измерений [4, 5], которые позволяют идентифицировать входные параметры модели. Алгоритмы усвоения данных измерений основаны, как правило, на минимизации квадратичного функционала качества прогноза, характеризующего отклонения модельного решения от измерений. При этом модель переноса пассивной примеси выступает в качестве ограничений [5] на вариации входных параметров.

**Модель переноса.** В качестве модели переноса пассивной примеси в Азовском море рассмотрим следующее уравнение в  $\sigma$ -координатах

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \frac{\partial K_H}{\partial \sigma} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial n} = 0$$

$$\sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Q_S(x, y), \quad \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Q_B(x, y) \quad (2)$$

или

$$\sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \bar{Q}_S \delta(x - x_0, y - y_0) ,$$

$$\sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \bar{Q}_B \delta(x - x_0, y - y_0) , \quad (3)$$

и начальными данными  $C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (4)$

где  $C$  – концентрация примеси;  $U, V, W$  – компоненты поля скорости;  $A_H$  и  $K_H$  – коэффициенты турбулентной диффузии в горизонтальном и вертикальном направлениях;  $D(x, y)$  – динамическая глубина;  $\sigma$  – вертикальная координата ( $\sigma = 0$  на поверхности,  $\sigma = -1$  на дне);  $Q_S(x, y), Q_B(x, y)$  – пере-

менные мощности источника на поверхности и на дне;  $\overline{Q}_S, \overline{Q}_B$  – постоянные мощности источника на поверхности и на дне;  $M$  – область интегрирования модели;  $\Gamma$  – граница области  $M$ ;  $M_t = M \times [0, T]$ .

**Сопряженная задача.** Поставим в соответствие (1) – (4) сопряженную задачу

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} = \\ & = D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} + D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} \\ & \Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \\ & \sigma = 0, \quad \sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \\ & C^*(x, y, \sigma, T) = h(x, y, \sigma). \end{aligned} \quad (5)$$

При выводе (5) учтено соотношение, полученное из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0. \quad (6)$$

Умножая (1) – (4) на  $C^*$  [6] и интегрируя по частям, с учетом (5) и (6) получим

$$\int_M h C dM = \int_M C_0 C^* dM, \quad (7)$$

Выбираем  $h$  в виде

$$h = \begin{cases} \frac{1}{m(\Omega)} & \text{в области } \Omega \\ 0 & \text{вне области } \Omega \end{cases}, \quad (8)$$

где  $m$  – мера некоторой области  $\Omega \in M$ . При этом, в левой части выражения (7) получаем среднюю концентрацию  $\overline{C}_T$  в  $\Omega$  на момент времени  $T$ .

Выбрав в качестве  $\Omega$  ячейку расчетной сетки [7] имеем

$$\overline{C}_T = \int_M C_0 C^* dM, \quad (9)$$

Таким образом, решая серию сопряженных задач (5) с начальными данными (8) по формуле (9) осуществляется оценка поля концентрации [7 – 8] в некоторой ячейке расчетной сетки. Начальные данные  $C_0$  могут соответствовать любому моменту времени  $t_0 \in [0, T]$ , при этом процедура восстановления поля концентрации пассивной примеси  $\overline{C}_T$  реализуется на интервале времени  $[t_0, T]$ . При интегрировании сопряженных задач осуществляется запись  $C^*$  на каждом моменте времени для восстановления  $\overline{C}_T$  по различным начальным данным  $C_{t_0}$ .

Сопряженные задачи в данном алгоритме независимы друг от друга и могут быть реализованы различными исполнителями (процессорами). Это позволяет с использованием современной вычислительной техники осуществлять необходимые вычисления в распараллеленном режиме. Дальнейшая оценка  $\bar{C}_T$  осуществляется без пространственно временного счета с использованием уже насчитанных значений  $C^*$ . Аналогично может быть осуществлен алгоритм построения решения сопряженной задачи и задачи в вариациях. При этом весь алгоритм ассимиляции реализуется в параллельном режиме при расчете соответствующих решений, которые используются в дальнейшем для оценки поля концентрации, решения сопряженной задачи и задачи в вариациях. Следует отметить, что при оценке решения задачи в вариациях используются те же решения, что и при оценке поля концентрации по формуле (9).

Выбирая  $h = \begin{cases} 1 & \text{в области } \Omega \\ 0 & \text{вне области } \Omega \end{cases}$ , можно оценить суммарную концен-

трацию на конечный момент времени в области  $\Omega$  по формуле

$$\int_{\Omega} C_T d\Omega = \int_M C_T dM = \int_M C_0 C_0^* dM. \quad (10)$$

При этом решение сопряженной задачи является весовой функцией при начальных данных, то есть по  $C_0^*$  можно судить [9 – 11] какие области  $M$  оказывают влияние на формирование полей концентрации примеси в  $\Omega$ .

**Вариационный алгоритм идентификации.** Задача усвоения данных измерений  $C_{\text{изм}}$  состоит в минимизации квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} [P(C - C_{\text{изм}}), P(C - C_{\text{изм}})]_{M_t}, \quad (11)$$

где  $M_t = M \times [0, T]$ ,  $P$  – оператор расширения нулями функций невязок заданных на множестве точек измерений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (11) с ограничениями модели эквивалентна поиску экстремума следующего функционала

$$I = I_0 + \left[ \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \right]_{M_t} + \left( \frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_e} + (C - C_0, C^*)_M + \\ + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_S(x, y), C^* \right)_{\sigma_t^0} + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_B(x, y), C^* \right)_{\sigma_t^{-1}} \quad (12)$$

Записывая вариацию функционала (12) и интегрируя по частям, с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в  $\sigma$ -координатах (6) получим

$$\delta I = (\delta Q_S(x, y), C^*)_{\sigma_t^0} + (\delta Q_B(x, y), C^*)_{\sigma_t^{-1}}, \quad (13)$$

где  $C^*$  – множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряженной задачи

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} -$$

$$- D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = -P(C - C_{изм}) \quad (14)$$

$$\Gamma: \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \sigma = 0: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \sigma = -1: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \quad (15)$$

$$t = T: C^* = 0. \quad (16)$$

В случае, когда данные измерений имеются на конечный момент времени  $T$ , в (14) задаем правую часть равную нулю, а при  $t = T$  в (16) используется условие

$$t = T: C^* = P(C_{изм} - C). \quad (17)$$

Из условия стационарности функционала (12)  $\delta I = 0$  и определения градиента функционала имеем

$$\nabla_{Q_s} I = \int_0^T C^*(x, y, 0, t) dt, \quad (18)$$

$$\nabla_{Q_B} I = \int_0^T C^*(x, y, -1, t) dt. \quad (19)$$

Аналогично для краевых условий (3) можно получить

$$\nabla_{\bar{Q}_s} I = \int_0^T C^*(x_0, y_0, 0, t) dt, \quad (20)$$

$$\nabla_{\bar{Q}_B} I = \int_0^T C^*(x_0, y_0, -1, t) dt. \quad (21)$$

Далее осуществляется спуск в направлении соответствующего градиента функционала. Аналогичным образом строится алгоритм идентификации в случае определения различных входных параметров задачи, например, мощности постоянного точечного источника [12] или начального поля концентрации [13]. В работе [14] процедура идентификации реализована для случая переменной по пространству мощности источника загрязнения.

**Результаты численных экспериментов.** Численные эксперименты проводились с баротропной моделью [3] для акватории Азовского моря. Были получены поля течений и коэффициенты турбулентной диффузии при различном ветровом воздействии, которые использовались в качестве входной информации при интегрировании модели переноса пассивной примеси. Полученные поля скоростей и коэффициентов турбулентной диффузии использовались в качестве входных параметров при интегрировании модели переноса пассивной примеси на срок 5 суток. При этом шаг по времени  $\Delta t = 240$  с, шаг по пространству  $\Delta x = 0,78$  км,  $\Delta y = 1,125$  км. По вертикали в модели используется расчетная сетка в  $\sigma$ -координатах с 15-ю горизонтами. С описанной моделью переноса пассивной примеси были проведены расчеты для точечных источников при различном ветровом воздействии. На рис.1 представлен снимок поверхности Азовского моря, из которого по концентрации взвешенного вещества можно судить о динамических процессах.

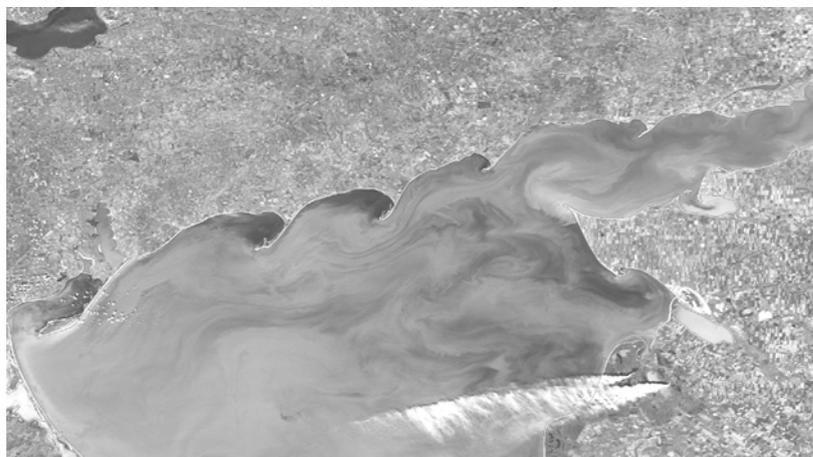


Рис. 1. Концентрация взвешенного вещества 16 октября 2015 г. (<https://earthdata.nasa.gov/labs/worldview/>)

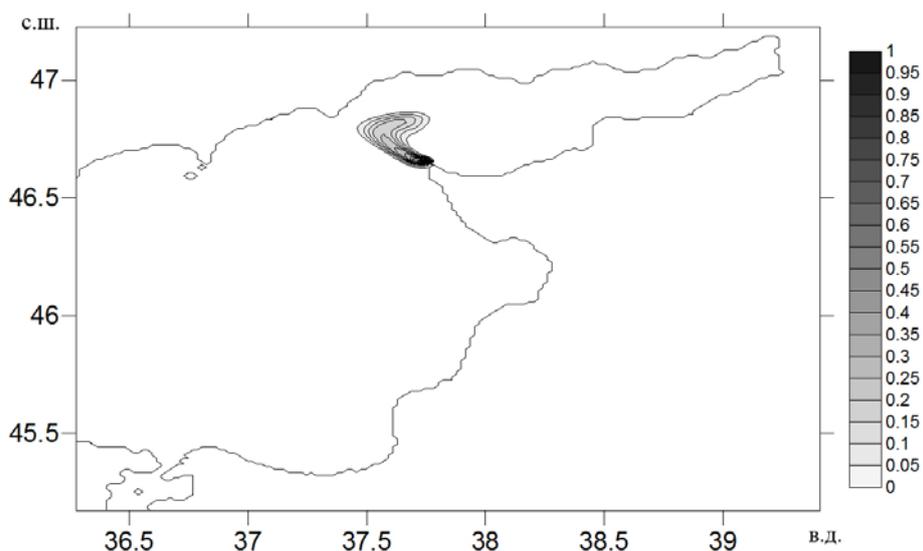
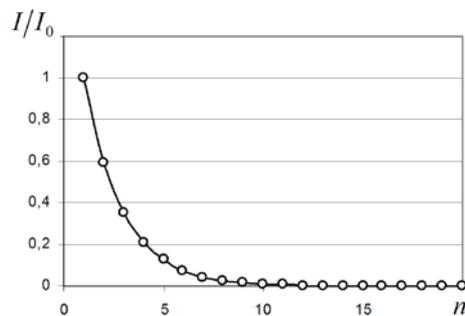


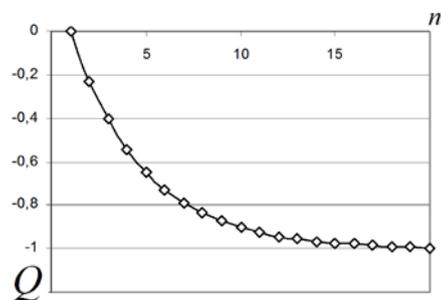
Рис. 2. Распространение пассивной примеси от точечного источника.

По направлению распространения продуктов горения от источников на суше можно определить направление ветра. Восточный ветер наблюдался в течении нескольких суток. Модельное поле пассивной примеси, нормированное на максимальное значение, изображено на рис.2. Результат получен при восточном ветровом воздействии и точечном источнике у косы Долгой. Сравнивая результат моделирования с данными полученными с ИСЗ, можно судить об адекватном описании моделью динамических процессов. Результат моделирования в дальнейшем использовался в качестве данных измерений при реализации вариационного алгоритма ассимиляции. На рис.3 показано падение нормированного функционала качества прогноза.

В процессе итераций (рис.3) происходит падение нормированного функционала качества прогноза, и восстанавливается известное значение  $Q_B$  (рис.4).



Р и с . 3 . Падение нормированного функционала качества прогноза.



Р и с . 4 . Идентификация в результате итераций.

Функционал (11) выпуклый и имеет единственный экстремум. Ограничения (1) – (4) линейны в силу линейности модели переноса пассивной примеси. Известно, что линейные ограничения не меняют выпуклости функционала, следовательно, функционал (12) также выпуклый и имеет единственный экстремум. Реализованная процедура позволяет осуществлять поиск оптимальных входных параметров. Для достижения минимума функционала требуется 15 – 20 итераций, при этом искомый параметр идентифицируется с достаточной точностью. Результаты численных экспериментов показали, что сходимость итерационного процесса зависит от количества усваиваемой информации. В случае ассимиляции всей информации о моделируемом поле на конечный момент времени для достижения минимума функционала требуется одна итерация. При ассимиляции данных измерений не во всех узлах расчетной сетки число итераций необходимое для поиска экстремума функционала возрастает. Наибольшей информативностью обладают точки, расположенные ближе к источнику загрязнения. В целом результаты расчетов показали надежную работу процедуры идентификации мощности источника примеси, а результаты моделирования распространения взвешенного вещества хорошо согласуются с динамическими процессами, происходящими в Азовском море при заданном ветровом воздействии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blumberg A.F., Mellor G.L.* A description of the three-dimensional coastal ocean circulation model / Three-dimensional coastal ocean models, Heaps N. (ed.), Am. Geoph. Union, 1987.– v.4.– P.1-16.
2. *Иванов В.А., Фомин В.В.* Математическое моделирование динамических процессов в зоне моря-суша.– Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2008. – 363с.
3. *Фомин В.В.* Численная модель циркуляции вод Азовского моря // Научные труды УкрНИГМИ.– 2002.– вып.249.– С.246-255.
4. *Marchuk G.I., Penenko V.V.* Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment / Modelling and Optimization of Complex Systems / Ed. G.I. Marchuk. Proc. of the IFIP-TC7 Working conf.– New-York: Springer, 1978.– P.240-252.
5. *Пененко В.В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов.– Л.: Гидрометеиздат, 1981.– 350 с.

6. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.– М.: Наука, 1982.– 320 с.
7. *Кочергин В.С.* Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2011.– вып.25, т.2.– С.270-276.
8. *Кочергин С.В., Кочергин В.С., Фомин В.В.* Определение концентрации пассивной примеси в Азовском море на основе решения серии сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2012.– вып.26, т.2.– С.112-118.
9. *Кочергин В.С.* Построение функций влияния для различных районов Черного моря // Системы контроля окружающей среды.– Севастополь, 2008.– С.275-277.
10. *Кочергин В.С.* Использование функций влияния при решении экологических задач // Системы контроля окружающей среды».– Севастополь, 2009.– С.205-208.
11. *Демьшев С.Г., Кочергин С.В., Кочергин В.С.* Построение функций влияния в модели переноса пассивной примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2009.– вып.19.– С.228-233.
12. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2010.– вып.22. – С.240-244.
13. *Кочергин В.С.* Идентификация начального поля концентрации для модели переноса пассивной примеси в Азовском море // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа.– Севастополь, 2012.– вып.26, т.2.– С.123-125.
14. *Кочергин С.В., Кочергин В.С.* Идентификация мощности источника загрязнения в Казантипском заливе на основе применения вариационного алгоритма // Морской гидрофизический журнал.– 2015.– № 2.– С.79-88.

Материал поступил в редакцию 06.05.2016 г.

S.V.Kochergin, V.S.Kochergin

#### **SIMULATION OF IMPURITY PROPAGATION IN THE SEA OF AZOV ON THE BASIS OF THE SOLUTION OF ADJOINT PROBLEM**

The model of passive impurity transport in the Sea of Azov is considered. On the base of it the variation algorithm for the identification of a constant power of pollution source is realized. In the test example the performance of algorithm of search of the best power source agreed with the measured data is shown.

**KEYWORDS:** identify of the power source, variation algorithm, functional of residual, concentration field, assimilation of measured data, the Sea of Azov